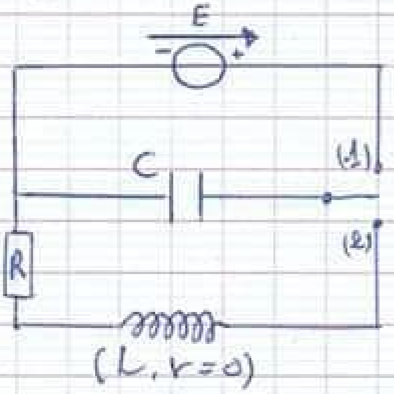
الاهتزازات الحرة لجملة كهربائية

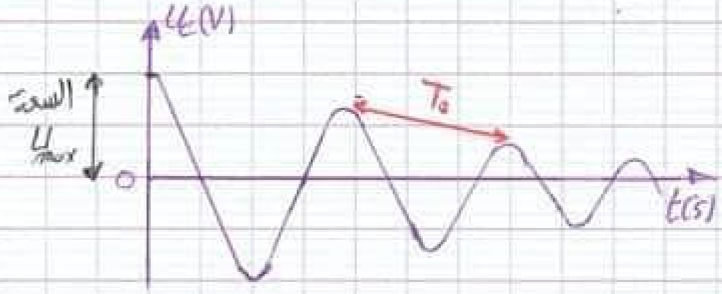
• الجملة الكهربائية (المهتزة): كل دارة تحتوي على وشيعة، مكثفة مشحونة ومقاومة.

- اهتزازات حرة متخامدة:



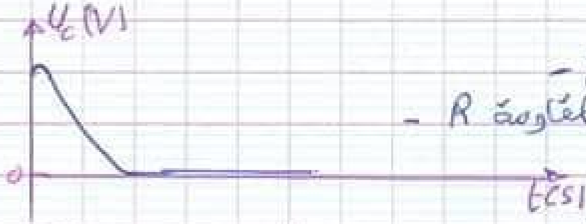
- نحقق دارة كهربائية (RCL) كما في الشكل:
- نضع البادلة في الوضع (1): تشحن المكثفة وعند نهاية عملية الشحن.
- نضع البادلة في الوضع (2): نوصل راسم اهتزاز المهبطي بين طرفي مكثفة نلاحظ:

① حالة مقاومة صغيرة:



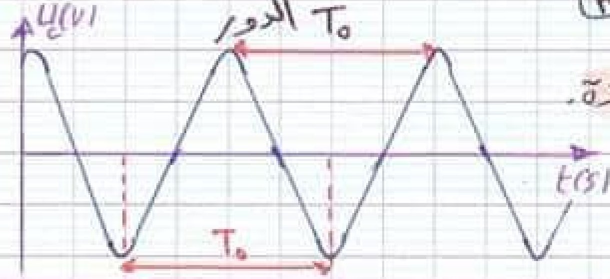
- نظام شبه دوري.
(T_0 شبه دور)
⇐ اهتزازات حرة متخامدة.

② حالة مقاومة كبيرة:



- نظام لادوري - حرج -
⇐ يزداد التخامد كلما زادت قيمة المقاومة R -

③ - حالة مقاومة معدومة $R=0$



- نظام دوري.
⇐ اهتزازات دورية غير متخامدة.
⇐ دارة مثالية (LC)

$$u_L = L\frac{di}{dt} \qquad i = \frac{dq}{dt} \qquad \boxed{q = Cu_c}$$

$$u_L = L\frac{d}{dt}\left(\frac{d(Cu_c)}{dt}\right) = LC\frac{d^2u_c}{dt^2}$$

$$u_R = Ri = R\frac{dq}{dt} = RC\frac{du_c}{dt}$$

ملاحظة:

$$q = Cu_c$$

يتناسب u_c و q طرداً
أي: لهما نفس التغيرات.

طمار عبد الناصر
أستاذ ثانوي
في العلوم الفيزيائية

الدراسة النظرية :

كتابة المعادلة التفاضلية : (الدارة الحقيقية RCL)

- للتوتر u_C :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_C + u_R + u_L = 0$$

ولدينا : $u_L = LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2}$ و $u_R = RC\dfrac{du_C}{dt}$

بالتعويض نجد :

$$u_C + RC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} = 0$$

بالقسمة على (LC) نجد :

$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0}$$

- للشحنة q :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_C + u_R + u_L = 0$$

ومنه

$$\frac{q}{C} + R\,i + L\frac{di}{dt} = 0$$

ومنه

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

بالقسمة على (L) نجد :

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0}$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها خارج البرنامج .

المعادلة التفاضلية (دارة مثالية LC) - (من أجل $R=0$) :

- للتوتر u_C :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_C + u_L = 0$$

ومنه

$$u_C + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} = 0$$

بالقسمة على (LC) نجد

$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0}$$

- للشحنة q :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_C + u_L = 0$$

ومنه

$$\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

بالقسمة على (L)

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0}$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية حلها من الشكل :

$$\boxed{u_C(t) = E\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$\boxed{q(t) = Q_0\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

- باشتقاق هذه العلاقة مرتين نجد :

$$\frac{du_C}{dt} = -E\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

ثم

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} = -E\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

ومنه :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \omega_0^2\underbrace{E\cos(\omega_0 t + \varphi)}_{u_C} = 0$$

ومنه

$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0}$$

بالمطابقة بالمعادلة التفاضلية نجد

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$ النبض الذاتي

$$\boxed{u_C(t) = \underbrace{E}_{\text{السعة}} \cos(\underbrace{\omega_0 t + \varphi}_{\text{الطور}})}$$

السعة: القيمة العظمى (للتوتر u_C)

ω_0: النبض الذاتي

φ: الطور الابتدائي - الصفحة الابتدائية (تعين من الشروط الابتدائية).

لما $t=0$ ، $u_C(0)=E$

$u_C(0) = E\cos(\varphi) = E \Leftarrow \cos(\varphi)=1 \Leftarrow \boxed{\varphi=0}$ يصبح: $\boxed{u_C(t) = E\cos(\omega_0 t)}$

• الدور الذاتي T_0 : $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ ومنه: $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$

• التواتر الذاتي f_0 : $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$ ومنه: $\boxed{f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$

• عبارة $i(t)$ و $q(t)$:

لدينا: $u_C(t) = E\cos(\omega_0 t + \varphi)$

ومنه: $q(t) = C u_C(t) = CE\cos(\omega_0 t+\varphi) = Q_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$$\boxed{q(t) = Q_0\cos(\omega_0 t+\varphi)}$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -Q_0\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

$$\boxed{i(t) = -Q_0\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)}$$

المشتق:

$$\boxed{[\cos(ax+b)]' = -a\sin(ax+b)}$$

طمار عبد الناصر
أستاذ ثانوي
في العلوم الفيزيائية

• التحليل البعدي للجداء LC :

نثبت أن المقدار $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ متجانس مع الزمن. (2π عدد بدون وحدة)

فيكفي أن نثبت $\sqrt{LC}$ متجانس مع الزمن.

من العلاقة $u_L = L\dfrac{di}{dt}$ ومنه: $[L] = \dfrac{[U][T]}{[I]}$

من العلاقة: $i = C\dfrac{du}{dt}$ ومنه: $[C] = \dfrac{[I][T]}{[U]}$

$$[L][C] = \frac{\cancel{[U]}[T]\cancel{[I]}[T]}{\cancel{[I]}\;\cancel{[U]}} = [T]^2$$

ومنه: الجداء LC متجانس مع مربع الزمن $\Leftarrow$ ($T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ متجانس مع الزمن)

• الدراسة الطاقوية :

- عبارة الطاقة المخزنة في مكثفة: $E_C = \frac{1}{2} C u_C^2$

- عبارة الطاقة المخزنة في وشيعة: $E_L = \frac{1}{2} L i^2$

- عبارة الطاقة الكلية المخزنة في ثنائي قطب LC : $E = E_C + E_L$

• إثبات أن طاقة ثنائي قطب LC تبقى ثابتة خلال الزمن :

① في دارة مثالية LC (المقاومة $R=0$) تكون $\boxed{\frac{dE}{dt}=0}$ يعني أن الطاقة محفوظة .

• نشتق E بالنسبة للزمن :

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dE_C}{dt}+\frac{dE_L}{dt}$$

• بما أن $E_C=\frac{1}{2}Cu_C^2$ فإن ، $\boxed{\frac{dE_C}{dt}=Cu_C\frac{du_C}{dt}}$

• بما أن $E_L=\frac{1}{2}Li^2$ فإن : $\frac{dE_L}{dt}=Li\frac{di}{dt}$

و $i=C\frac{du_C}{dt}$ ← $\frac{di}{dt}=C\frac{d^2u_C}{dt^2}$ ومنه $\boxed{\frac{dE_L}{dt}=LC^2\frac{du_C}{dt}\frac{d^2u_C}{dt^2}}$

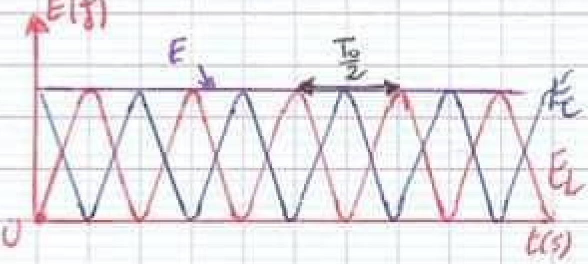
$$\frac{dE}{dt}=Cu_C\frac{du_C}{dt}+LC^2\frac{du_C}{dt}\frac{d^2u_C}{dt^2}=C\frac{du_C}{dt}\underbrace{\left(u_C+LC\frac{d^2u_C}{dt^2}\right)}_{\text{م. تفاضلية}=0}=0$$

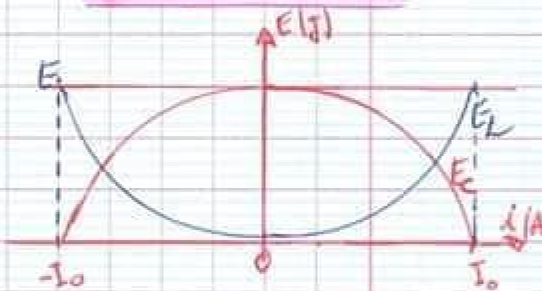
في النظام الدوري، تنتقل الطاقة من المكثفة إلى الوشيعة و العكس، دون تخامد . الطاقة الكلية تبقى ثابتة.

$$E=E_C+E_L=\frac{1}{2}Cu_C^2+\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}CE^2=\frac{1}{2}LI_0^2$$

• مخططات الطاقة :

- دور E_L و E_C هو $\left(\frac{T_0}{2}\right)$





② في دارة حقيقية (RCL) :

$$E=E_C+E_L=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}Li^2$$

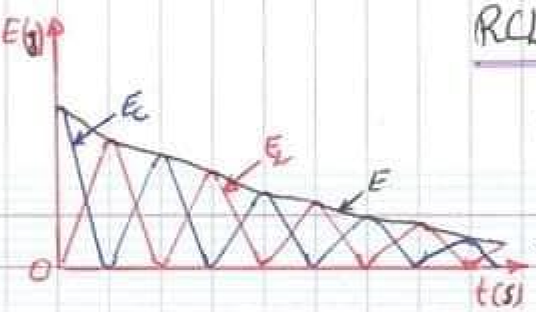
نشتق طرفي المعادلة نجد:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{C}q\frac{dq}{dt}+Li\frac{di}{dt}=\frac{1}{C}q\frac{dq}{dt}+L\frac{dq}{dt}\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$=\frac{dq}{dt}\left(\frac{q}{C}+L\frac{d^2q}{dt^2}\right)\Rightarrow\boxed{\frac{dE}{dt}=-Ri^2}$$

لدينا: $\boxed{\frac{1}{LC}q+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{d^2q}{dt^2}=0}$ بضرب في L نجد $\boxed{\frac{q}{C}+Ri+L\frac{d^2q}{dt^2}=0}$

* مخططات الطاقة في حالة الدارة RCL



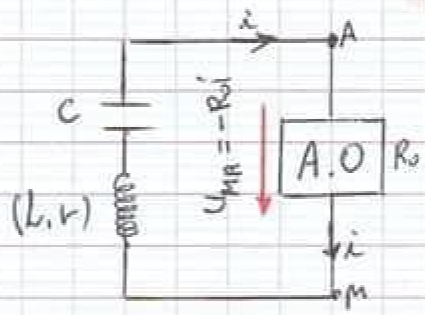
* في النظامين شبه الدوري واللادوري تتناقص الطاقة الكلية خلال انتقالها من مكثفة الى الوشيعة والعكس.

« ويرجع ذلك الى :

وجود المقاومة R التي تبدد الطاقة بمفعول جول.

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -Ri^2}$$ ⟸ أي: تخامد الاهتزازات.

ولتعويض هذا التخامد يجب تغذية الدارة RCL بتوصيلها بجهاز (مضخم تطبيقي A.O) يعوض الطاقة الضائعة بفعل المقاومة حيث يتصرف هذا الجهاز كمقاومة سالبة.



فيصبح قانون جمع التوترات :

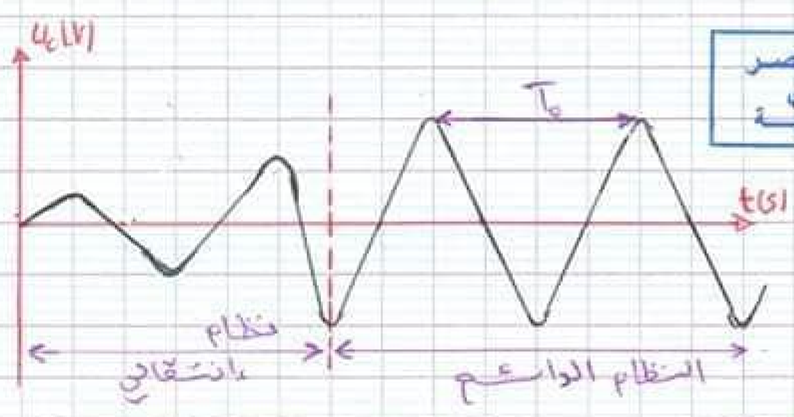
$$u_C + u_L = R_0 i$$

$$u_C + L\frac{di}{dt} + ri = R_0 i$$

- من أجل $R_0 = r$ يكون : $u_C + L\frac{di}{dt} = 0$

$$u_C + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0}$$

فيتحول النظام من اهتزازي متخامد الى اهتزازي مغذى غير متخامد.



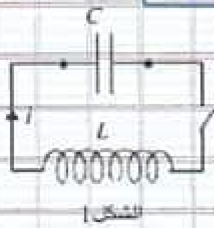
ملاحظة : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ كلما زادت قيمة سعة C و الذاتية L ⟸ زادت قيمة الدور T_0.

- تمرين 3:

1. تتكون جملة كهربائية من مكثفة سعتها $C = 0,50\mu F$ مشحونة تحت توتر كهربائي قدره $U_0 = 5V$ ووشيعة ذاتيتها $L = 0,50H$ ومقاومتها مهملة الشكل 1.

نغلق القاطعة K في اللحظة $t = 0$.

طعار عبد الناصر
أستاذ ثانوي
في العلوم الفيزيائية



الشكل 1

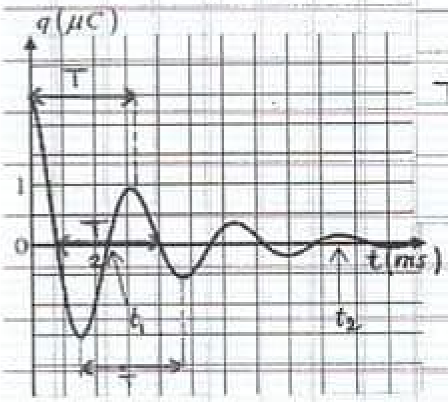
1.1) $q(t)$ شحنة المكثفة في لحظة كيفية t:

- أ) اكتب عبارة التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة بدلالة C, q.
- ب) اكتب عبارة التوتر الكهربائي بين طرفي الوشيعة بدلالة t, L, q.

2. استنتج من السؤال 1 المعادلة التفاضلية المميزة لتطور الشحنة q.

3. المعادلة التفاضلية السابقة تقبل حلا من الشكل: $q(t) = Q\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

- أ) ماذا يمثل المقدارين Q و T_0؟ وأوجد قيمتيهما العددية.
- ب) يشير φ إلى الطور الابتدائي. تحقق من أن $\varphi = 0$ يتوافق مع شروط الدراسة.



II) انطلاقا من البيان:

- أ) أوجد قيمة شبه الدور T للاهتزازات الحاصلة. ـ وقارنه مع الدور T_0
- ب) استنتج قيمة التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة عند اللحظة $t = 0$.

الحل:

1 - عبارة التوتر بين طرفي المكثفة:

ـ لدينا $q = Cu_c$ ومنه: $u_c = \frac{q}{C}$

ب/ عبارة التوتر بين طرفي الوشيعة:

لدينا: $\begin{cases} u_L = L\frac{di}{dt} \\ i = \frac{dq}{dt} \end{cases}$ و ومنه:

$$u_L = L\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) = \frac{d^2q}{dt^2}$$

2 - المعادلة التفاضلية لشحنة q:

بتطبيق قانون جمع التوترات $u_c + u_L = 0$ ومنه:

$$\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0}$$

3 - المقادير:

الشحنة الأعظمية: Q_0 $\quad q = Cu_c \Rightarrow \boxed{Q = CE}$

$$Q = 0,5\,10^{-6}(5) = 2,5.10^{-6}C = 2,5\mu C.$$

T_0 الدور الذاتي: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{0,5(0,5.10^{-6})} = 3,14\ ms$

ب/ من الشروط الابتدائية $(t = 0 \ ,\ q(0) = Q)$ ومنه:

$$q(0) = \cancel{Q}\cos\left(\frac{2\pi}{T}(0) + \varphi\right) = \cancel{Q} \Rightarrow \cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \boxed{\varphi = 0}$$

II) أ/ من البيان: شبه الدور $T = 3,2\,ms$ مقارنة $T \simeq T_0$

ب/ التوتر u_c عند $t = 0$:

$$u_0 = \frac{Q_0}{C} = \frac{2,5.10^{-6}}{0,5.10^{-6}} = 5V$$

$$\boxed{u(0) = E = 5V}$$

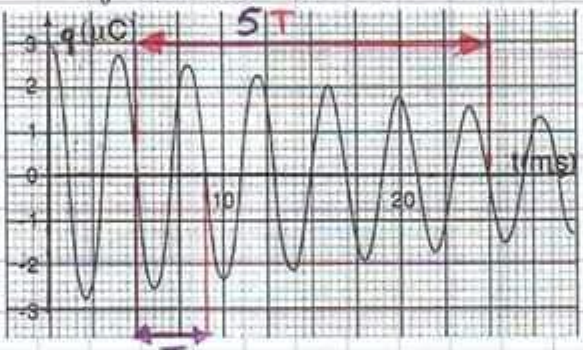
تتكون دارة كهربائية من مكثفة مشحونة سعتها $C = 1,0\mu F$ و وشيعة ذاتيتها $L = 0,40\ H$ و مقاومة مهملة و ناقل أومي مقاومته R .

يمثل الشكل 1 تطور الشحنة q التي يحملها أحد لبوسي المكثفة بدلالة الزمن .

1- حدد بيانيا شبه الدور T للاهتزازات .

2- اوجد المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة $q(t)$ في الحالة التي تكون فيها المقاومة R مهملة .

3- تحقق من أنّ $q(t) = Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \theta\right)$ تشكل حلاً للمعادلة التفاضلية علما أنّ: $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$



4- احسب الدور الذاتي T_0 و قارنه مع شبه الدور T .

5- ما الفرق بين حل المعادلة التفاضلية و البيان (الشكل 1) ؟

6- كيف تفسّر هذا الفرق ؟

طمار عبد الناصر
أستاذ ثانوي
في العلوم الفيزيائية

الحل :

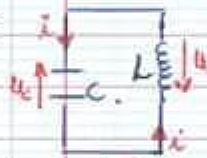
① تحديد شبه الدور T : (لقياس T بدقة يستحسن قياس عدد من الدورات)

- نقيس المدة الزمنية الفاصلة بين $t_2 = 25ms$ و $t_1 = 5ms$ ونكتب :

$$t_2 - t_1 = 5T \rightarrow T = \frac{t_2 - t_1}{5} = 4\ ms$$

② المعادلة التفاضلية لـ q : (في حالة R=0 دارة مثالية LC)

حسب قانون جمع التوترات ، $u_C + u_L = 0$



$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0}$$

③ تحقق من أن $q(t) = Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \theta\right)$ حل للمعادلة التفاضلية :

- نحسب :

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0}Q_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \theta\right) \quad و \quad \frac{d^2q}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \theta\right)$$

- بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد ،

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \theta\right) + \frac{1}{LC}Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \theta\right) = 0$$

ومنه

$$\left(-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC}\right) Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \theta\right) = 0$$

إذن ، $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

ومنه هو حل للمعادلة .

④ حساب T_0 : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC} = 3,97.10^{-3}s$ ومنه $T = T_0$

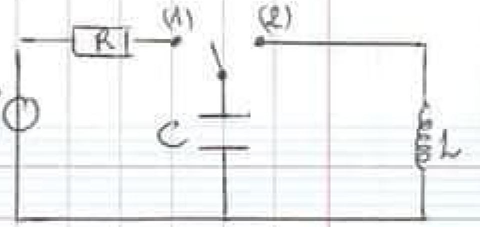
⑤- حل المعادلة دالة دورية أما المنحنى فهو غير دوري .

لأن : السعة تتناقص مع الزمن . (اهتزازات متخامدة)

⑥- تخامد الاهتزازات ناتج عن ضياع الطاقة بفعل جول بسبب المقاومة R.

بكالوريا (تقني رياضي +رياضيات) 2019 م1

- توتر المولد $E = 12V$
- المقاومة $R = 100\,\Omega$
- سعة المكثفة $C = 2.10^{-4}F$

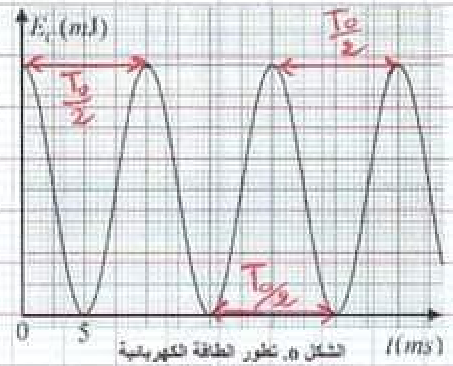


2. عندما يبلغ التوتر الكهربائي u_C بين طرفي المكثفة قيمته العظمى $U_{C_{max}}$، نضع البادلة في الوضع (2) في لحظة نعتبرها مبدأ للأزمنة $t = 0$.

1.2. بتطبيق قانون جمع التوترات، جد المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة الكهربائية $q(t)$ للمكثفة.

2.2. إنّ حل هذه المعادلة التفاضلية من الشكل: $q(t) = Q_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ حيث Q_0 تمثل الشحنة الأعظمية للمكثفة، T_0 الدور الذاتي لاهتزازات الدارة الكهربائية و φ الصفحة الابتدائية. جد العبارة الحرفية لكل من الثابتين Q_0 و T_0.

3.2. الدراسة الطاقوية مكنتنا من تمثيل تطور الطاقة الكهربائية المخزنة في المكثفة بدلالة الزمن $E_C = g(t)$ كما يوضحه الشكل 6.



الشكل 6. تطور الطاقة الكهربائية المخزنة في المكثفة بدلالة الزمن

1.3.2. باستعمال المنحنى $E_C = g(t)$، تأكد من أن الوشيعة صافية $(r = 0)$.

2.3.2. احسب الطاقة الكهربائية العظمى $E_{C_{max}}$ المخزنة في المكثفة.

3.3.2. عيّن بيانيا قيمة الدور الذاتي T_0 للدارة المهتزة ثم استنتج قيمة الذاتية L للوشيعة.

الحل:

① المعادلة التفاضلية للشحنة q : حسب قانون جمع التوترات:

$u_C + u_L = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$ ----- (*)

② إيجاد عبارة T_0:

- بتعويض الحل في (*): $-\frac{4\pi^2}{T^2}Q_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right) + \frac{1}{LC}Q_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right) = 0$

$\left(-\frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{1}{LC}\right)Q_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right) = 0 \Rightarrow -\frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}}$

- عبارة Q_0 : من الشروط الابتدائية $\boxed{q(t) = C\,u_C(t)} \Rightarrow \boxed{q(0) = C\,u_C(0) = CE}$

* الوشيعة صرفة $(r=0)$: لأنه لا يوجد ضياع في الطاقة.

- الطاقة الأعظمية $E_{C_{max}}$: $E_{C_{max}} = \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}(2.10^{-4})(12)^2 = 14,4\ mJ$

- قيمة الدور T_0: من البيان: $\frac{T_0}{2} = 10\ ms \Rightarrow T_0 = 20\ ms$

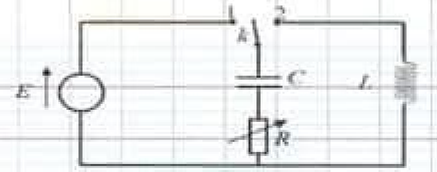
- قيمة ذاتية L: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \rightarrow L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = \frac{(20.10^{-3})^2}{4(10)2.10^{-4}} = 0,05H$

بكالوريا (تقني رياضي +رياضيات) 2017 م 2

نحقق التركيب التجريبي الموضح في الشكل-2 والمتكون من:

- مولد مثالي للتوتر الكهربائي، قوته المحركة الكهربائية E .
- مكثفة فارغة سعتها C .
- ناقل أومي مقاومته R متغيرة.
- وشيعة ذاتيتها L ، مقاومتها مهملة.
- بادلة k .

$$\begin{cases} E = 9V \\ C = 49{,}4\ \mu F \\ R = 10{,}1\ K\Omega \end{cases}$$



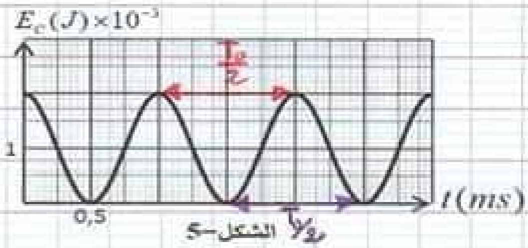
الشكل-2

4) بعد إتمام شحن المكثفة، نجعل مقاومة الناقل الأومي ($R = 0$) ونضع البادلة في الوضع (2) عند اللحظة $t = 0s$.

أ) اكتب المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر الكهربائي $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة.

ب) بين أن: $u_C(t) = A\cos(\frac{1}{\sqrt{LC}}t)$ حلا للمعادلة التفاضلية السابقة ثم حدد عبارة كل من الدور الذاتي للاهتزازات (T_0) والعدد A بدلالة المقادير المميزة للدارة.

جـ) يمثل البيان الموضح في الشكل-5 تغيرات الطاقة المخزنة في المكثفة $E_c(t)$ بدلالة الزمن.



الشكل-5

باستعمال البيان استنتج قيمة:

- الدور الذاتي (T_0) للاهتزازات.
- ذاتية الوشيعة (L).

الحل: أ) المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_c :

بتطبيق قانون جمع التوترات نجد: $u_c + u_L = 0$

ولدينا: $u_L = L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2u_c}{dt^2}$ ومنه

$u_c + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$

$$\boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_c = 0}$$

ب) تبيان حل المعادلة:

$$u_c(t) = A\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) \Rightarrow \frac{d^2u_c}{dt^2} = -A\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) = -\frac{1}{LC}u_c(t)$$

إذن: $\frac{d^2u_c}{dt^2} = -\frac{1}{LC}u_c(t)$ ومنه: $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_c = 0$ و.هـ.م.

- عبارة الدور الذاتي: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ حيث $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ومنه $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$

- عبارة A: من الشروط الابتدائية عند $t = 0s$: $u_c(0) = A = E$

جـ) من البيان: - قيمة الدور الذاتي T_0 :

$\frac{T_0}{2} = 1\ ms$

$T_0 = 2(1) = 2\ ms$

- ذاتية الوشيعة L :

$T_0^2 = 4\pi^2 LC$

$$L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C} \Rightarrow L = \frac{(2\cdot10^{-3})^2}{4(3{,}14)^2(49{,}4\cdot10^{-6})} = 2\cdot10^{-3}H$$

$$\boxed{L = 2\ mH}$$

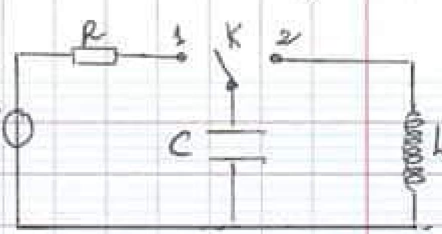
بكالوريا (تقني رياضي +رياضيات) 2018 م2 - بتصرف -

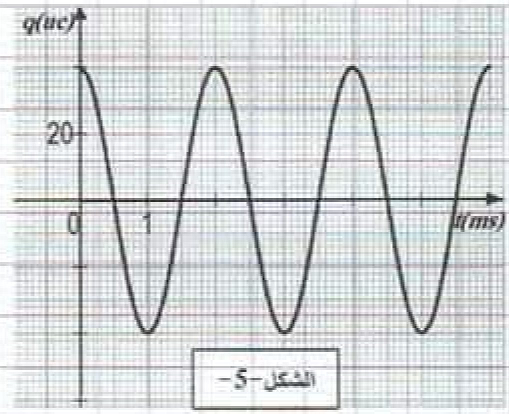
- ناقل أومي $R = 100\,\Omega$

- سعة المكثفة $C = 10\mu F$

- توتر المولد E $E = 4V$

- لتكن الدارة :





II) بعد الانتهاء من شحن المكثفة التي تعتبر أنّ سعتها $C=10\mu F$ ، نقوم بتغيير البادلة إلى الوضع (2) عند اللحظة $t=0$. نعاين تغيرات الشحنة $q(t)$ للمكثفة بواسطة نفس البرمجية السابقة فنحصل على المنحنى الممثل في الشكل-5- .

1. ما هو نمط الاهتزاز المتحصل عليه ؟ وأيّ نظام للاهتزازات يبيّنه الشكل -5-؟

2. جد المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة $q(t)$ للمكثفة.

3. علما أنّ حل المعادلة التفاضلية السابقة هو من الشكل: $q(t)=Q_0\cos(\frac{2\pi}{T}t)$ حيث T يمثل دور الاهتزازات .

1.3. جد عبارة الدور T بدلالة مميزات الدارة .

2.3. استنتج قيمة ذاتية الوشيعة L.

4. اكتب المعادلة الزمنية لتغيرات شدة التيار $i(t)$ ثم أرسم المنحنى $i = f(t)$.

الحل: ① - نمط الاهتزاز حر غير متخامد

المنظام : الدوري .

② - المعادلة التفاضلية لـ $q(t)$:

تطبيق قانون جمع التوترات :

$u_C + u_L = 0$

ومنه ،

$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$

$\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0}$

③ - ايجاد عبارة الدور T :

$q(t) = Q_0\cos(\frac{2\pi}{T}t) \Rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{2\pi}{T}Q_0\sin(\frac{2\pi}{T}t)$

$\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}Q_0\cos(\frac{2\pi}{T}t)$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$-\frac{4\pi^2}{T^2}Q_0\cos(\frac{2\pi}{T}t) + \frac{1}{LC}Q_0\cos(\frac{2\pi}{T}t) = 0$

$\left(-\frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{1}{LC}\right)Q_0\cos(\frac{2\pi}{T}t) = 0$

ومنه : $-\frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{1}{LC} = 0$

أي $\boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}}$

- قيمة ذاتية (L) : $\boxed{L = \frac{T^2}{4\pi^2 C}}$

- من المنحنى $\boxed{T = 2ms}$

ومنه

$L = \frac{(2\cdot10^{-3})^2}{4(3.14)^2\,10\cdot10^{-6}} = 0{,}01\ H$

④ المعادلة الزمنية للتيار $i(t)$:

$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow i(t) = -\frac{2\pi}{T}Q_0\sin(\frac{2\pi}{T}t)$

$\boxed{i(t) = -\omega_0 Q_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t)}$

$i(t) = -\underbrace{0{,}04\pi}_{0{,}1256} \sin(\frac{2\pi}{T}t)$

رسم $i(t)$:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{2T}{4}$	$\frac{3T}{4}$
i	0	$-0{,}04\pi$	0	$0{,}04\pi$