مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية)

الملخص // الشعبة: الثالثة علوم تجريبية؛ تقني رياضي.

ملخص: حول الدّوال العددية// التحضير الجيد للبكالوريا// الشعبة: 03 ع ت ر.

الاشتقاقية

❶ قابلية اشتقاق دّالة عند عدد حقيقي: (العدد المشتق)

لدراسة قابلية اشتقاق دّالة f عند x_0

➢ ندرس نهاية النسبة $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ لما h يؤول إلى 0

أو

➢ ندرس نهاية النسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ لما x يؤول إلى x_0

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\blacksquare$$

$f'(x_0)$ يسمى **العدد المشتق** للدّالة f عند x_0.

$\blacksquare = 0 = f'(x_0)$	$\blacksquare = l = f'(x_0)$	$\blacksquare = \infty$
الإستنتاج:		
f قابلة للاشتقاق عند x_0.	f قابلة للاشتقاق عند x_0.	f غير قابلة للاشتقاق عند x_0.
التفسير الهندسي:		
المنحنى (C_f) **يقبل مماسا مُوازيا لحامل محور الفواصل** عند النقطة ذات الفاصلة x_0.	المنحنى (C_f) **يقبل مماسا** عند النقطة ذات الفاصلة x_0.	المنحنى (C_f) **يقبل مماسا مُوازيا لحامل محور التراتيب** عند النقطة ذات الفاصلة x_0.
معامل توجيه المماس هو:		
$f'(x_0)=0$	$f'(x_0)=l$	/
معادلة المماس من الشكل:		
$y=f(x_0)$	$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$	$x=x_0$

❷ قابلية اشتقاق دالة عند عدد حقيقي من اليمين أو من اليسار:

لدراسة قابلية اشتقاق دالة f عند x_0 من اليمين

➢ ندرس نهاية النسبة $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ لما h يؤول إلى 0 بقيم أكبر.

أو

➢ ندرس نهاية النسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ لما x يؤول إلى x_0 بقيم أكبر.

$f'_d(x_0)$ يسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 من اليمين.

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \blacksquare$$

$\blacksquare = 0 = f'_d(x_0)$	$\blacksquare = l_d = f'_d(x_0)$	$\blacksquare = \infty$
الاستنتاج:		
f قابلة للاشتقاق عند x_0 من اليمين.	f قابلة للاشتقاق عند x_0 من اليمين.	f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 من اليمين.
التفسير الهندسي:		
المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس مُوازي لحامل محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة x_0.	المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0.	المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس مُوازي لحامل محور التراتيب عند النقطة ذات الفاصلة x_0.
معامل توجيه نصف المماس هو:		
$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = l$	/
معادلة نصف المماس من الشكل:		
$y = f(x_0)$	$y = f'_d(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$	$x = x_0$

حكمة أعجبتني: ليس المهم هو نجاحك، لكن الأهم هو قيمتك بعد النجاح.

القراءة البيانية للعدد المشتق:

يُمكن إيجاد العدد المشتق بيانيا بأخذ نقطتين A و B من المماس معلومتين الإحداثيات فنجد: $\boxed{f'(x_0) = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}}$.

إذا كان المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 مُوازيا لمحور الفواصل فإن معامل توجيهه معدوم أي $f'(x_0) = 0$ وتكون معادلته من الشكل $y = f(x_0)$.

لدراسة قابلية اشتقاق دالة f عند x_0 من اليسار

- ندرس نهاية النسبة $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ لما h يؤول إلى 0 بقيم أصغر.

أو

- ندرس نهاية النسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ لما x يؤول إلى x_0 بقيم أصغر.

$f'_g(x_0)$ يسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 من اليسار.

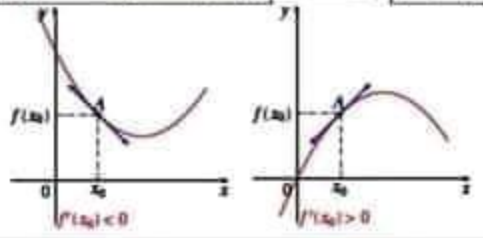
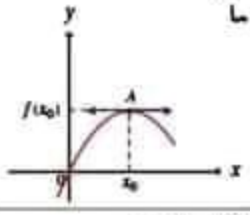
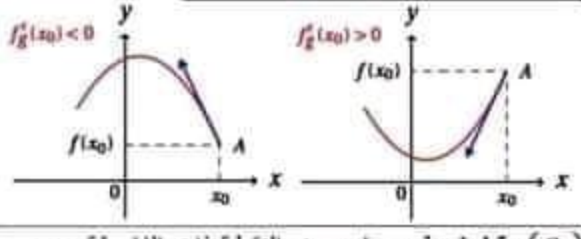
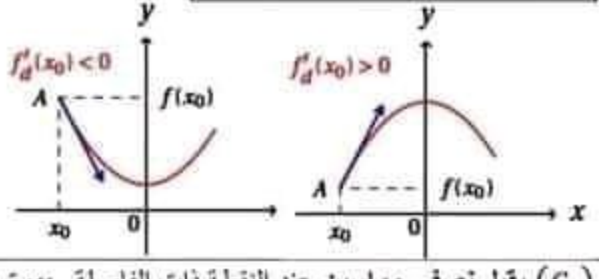
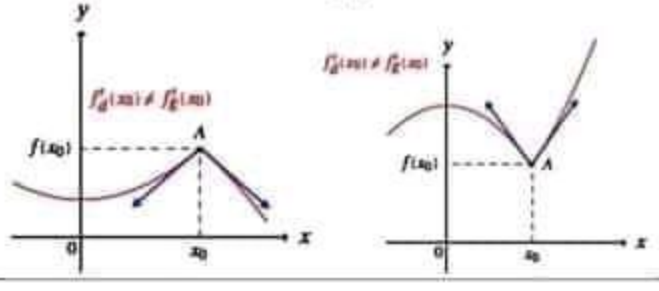
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ <}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \blacksquare$$

$\blacksquare = 0 = f'_g(x_0)$	$\blacksquare = l_d = f'_g(x_0)$	$\blacksquare = \infty$
الاستنتاج:		
f قابلة للاشتقاق عند x_0 من اليسار.	f قابلة للاشتقاق عند x_0 من اليسار.	f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 من اليسار.
التفسير الهندسي:		
المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس مُوازي لحامل محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة x_0.	المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0.	المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس مُوازي لحامل محور التراتيب عند النقطة ذات الفاصلة x_0.
معامل توجيه نصف المماس هو:		
$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = l$	/
معادلة نصف المماس من الشكل:		
$y = f(x_0)$	$y = f'_g(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$	$x = x_0$

ملاحظات:

في حالة	فإن	التفسير الهندسي
$f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = l$	f قابلة للاشتقاق عند x_0.	المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة x_0.
$f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$	f غير قابلة للاشتقاق عند x_0.	المنحنى (C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة x_0؛ وهي نقطة زاوية لـ(C_f).
$\begin{cases} \blacksquare = +\infty \\ x \xrightarrow{>} x_0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} \blacksquare = -\infty \\ x \xrightarrow{<} x_0 \end{cases}$		المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس مُوازي لحامل محور التراتيب مُوجه نحو الأعلى عند النقطة ذات الفاصلة x_0.
$\begin{cases} \blacksquare = +\infty \\ x \xrightarrow{<} x_0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} \blacksquare = -\infty \\ x \xrightarrow{>} x_0 \end{cases}$		المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس مُوازي لحامل محور التراتيب مُوجه نحو الأسفل عند النقطة ذات الفاصلة x_0.

❸ التفسيرات الهندسية للاشتقاقية:

النهاية	الاستنتاج	التفسير البياني (أو الهندسي)
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$ **أو** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$	الدّالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، وعددها المشتق هو $\boxed{f'(x_0)=l}$.	المنحنى (C_f) **يقبل مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معامل توجيهه (ميله)** $\boxed{f'(x_0)=l}$، **ومعادلته:** $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$. 
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$ **أو** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$	الدّالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، وعددها المشتق هو $\boxed{f'(x_0)=0}$.	المنحنى (C_f) **يقبل مماس (مُوازي لمحور الفواصل)** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معامل توجيهه (ميله)** $\boxed{f'(x_0)=0}$ **ومعادلته:** $\boxed{y=f(x_0)}$. 
$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_1$ **أو** $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_1$	الدّالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، على اليسار وعددها المشتق هو $\boxed{f_g'(x_0)=l_1}$.	المنحنى (C_f) **يقبل نصف مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معادلته:** $\boxed{y=f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$. 
$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_2$ **أو** $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_2$	الدّالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، على اليمين وعددها المشتق هو $\boxed{f_d'(x_0)=l_2}$.	المنحنى (C_f) **يقبل نصف مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معادلته:** $\boxed{y=f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$. 
$l_1\neq l_2$	الدّالة f **غير قابلة للاشتقاق** عند x_0.	المنحنى (C_f) **يقبل نصفي مماسين** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، تسمى هذه النقطة: **نقطة زاوية للمنحنى** (C_f). 

❹ المشتقات والعمليات ـ مشتقة الدّالة مركب:

① مشتقات دّوال مألوفة:

$f(x) =$	$f'(x) =$	مجالات قابلية الاشتقاق
$(k \in \mathbb{R})\ k$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$(n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N})\ x^n$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$
$(n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$cosx$	$-sinx$	$\mathbb{R}$
$sinx$	$cosx$	$\mathbb{R}$

② المشتقات والعمليات على الدّوال:

النتائج ملخصة في الجدول التالي:

u و v دالتان **قابلتان للاشتقاق** على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

	العملية	الدالة المشتقة	الشرط
مجموع دالتين	$u+v$	$u'+v'$	
جداء دالة بعدد حقيقي	ku	ku'	
جداء دالتين	$u.v$	$u'.v+v'u$	
مقلوب دالة	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	الدالة u لا تنعدم على I
حاصل قسمة دالتين	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$	الدالة v لا تنعدم على I

نتائج:

☑ الدّوال **كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$،

☑ الدّوال **الناطقة قابلة للاشتقاق** على **كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها.**

③ الاشتقاقية والاستمرارية:

خاصية:

إذا كانت f **قابلة للاشتقاق** على مجال I، فإنّها **مستمرة** على هذا المجال **وعكس هذه الخاصية ليس صحيح.**

مثال: (● حل التمرين 02 ص58)

الدّالة $x \mapsto |x|$ مستمرة عند 0؛ بينما النسبة $\frac{|h|}{h}$ **لا تقبل نهاية** عند 0 لأن: $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{|h|}{h} = -1$، و $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{|h|}{h} = -1$،

ومنه: الدّالة $x \mapsto |x|$ **غير قابلة للاشتقاق** عند 0.

تذكير ببعض المتطابقات الشهيرة:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3b^2a - b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

④ اشتقاق دالة مركبة:

أ. مشتقة الدالة $v \circ u$

$$(v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x)$$

ب. تطبيقات

مشتقة الدّالة $x \mapsto u(ax+b)$ $(a \neq 0)$	مشتقة الدّالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$	مشتقة الدّالة $x \mapsto [u(x)]^n$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 2$)	مشتقة الدّالة $x \mapsto \frac{1}{[u(x)]^n}$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 1$)
الدّالة: $f(x) = u(ax+b)$	$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f(x) = [u(x)]^n$	$f(x) = \frac{1}{[u(x)]^n}$
المشتقة: $f'(x) = au'(ax+b)$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$	$f'(x) = -\frac{nu'(x)}{[u(x)]^{n+1}}$
أمثلة: $f(x) = \cos(2x-3)$	$f(x) = \sqrt{x^2+3}$	$f(x) = (x^2+2x-3)^3$	$f(x) = \frac{1}{(x^2+3)^8}$
نجد: $f'(x) = -2\sin(2x-3)$	$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$	$f'(x) = 3(2x+2)(x^2+2x-3)^2$	$f'(x) = -\frac{8(2x)}{(x^2+3)^9}$

⑤ الدّالة الزوجية ـ الدّالة الفردية:

الدّالة f	معناه	ويكون
① الزوجية	1) D_f متناظرة بالنسبة إلى الصفر (أي: من أجل كل x من D_f، فإنّ $-x$ من D_f) 2) $f(-x) = f(x)$.	منحناها متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.
② الفردية	1) D_f متناظرة بالنسبة إلى الصفر (أي: من أجل كل x من D_f، فإنّ $-x$ من D_f) 2) $f(-x) = -f(x)$ أو $f(-x) + f(x) = 0$.	منحناها متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

❻ نقطة الإنعطاف:

بصفة عامة، لتعيين **نقطة الانعطاف**؛ نقوم بما يلي:

➢ **نحسب المشتق الثاني** $f''(x)$، **وندرس إشارته**، فإذا وجدنا $f''(x)$ **انعدم** عند قيمة x_0 من D_f، **مُغيّراً إشارته**، تكون النقطة ذات الفاصلة x_0 **نقطة انعطاف** لـ(C_f)؛ أي: $\boxed{E(x_0;f(x_0))}$.

x		x_0	
$f''(x)$	+	0	-

x		x_0	
$f''(x)$	-	0	+

حالة خاصة:

➢ في بعض الحالات، يُمكن تعيين **نقطة الانعطاف** دون اللجوء إلى المشتق الثاني $f''(x)$، وذلك إذا **انعدم المشتق الأول** $f'(x)$ عند قيمة x_0 من D_f، **ولم يُغيّر إشارته**، فتكون النقطة ذات الفاصلة x_0 **نقطة انعطاف** لـ(C_f)؛ أي: $\boxed{E(x_0;f(x_0))}$.

x		x_0	
$f'(x)$	+	0	+

x		x_0	
$f'(x)$	-	0	-

ملاحظة:

➢ في بعض الحالات، يُفرض علينا سياق التمرين أن نُعيين **نقطة الانعطاف** بالكيفية التالية: يُطلب منّا أن **ندرس وضعية المنحنى** (C_f) **بالنسبة إلى المماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، فإذا وجدنا أنّ (C_f) **غيّر وضعيته بالنسبة إلى المماس إقبل وبعد نقطة التماس**؛ نستنتج أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0 **نقطة انعطاف** لـ(C_f)؛ أي: $\boxed{E(x_0;f(x_0))}$.

❼ مركز التناظر-محور التناظر:

① محور التناظر	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x=\alpha}$ **محور تناظر** للمنحنى (C_f)، **معناه:** $\boxed{f(2\alpha-x)=f(x)}$ أو $\boxed{f(\alpha-x)=f(\alpha+x)}$.
② مركز التناظر	النقطة $\boxed{\omega(\alpha;\beta)}$ **مركز تناظر** للمنحنى (C_f)، **معناه:** $\boxed{f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta}$ أو $\boxed{f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta}$.

❺ المماس:

هناك ستّ (06) صيغ -تقريباً- لطرح سؤال المماس، لكن تبقى **معرفة فاصلة نقطة التّماس x_0 هي المفتاح للإجابة** على أي منها كما سنرى:

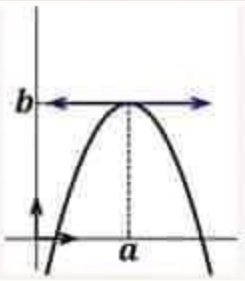
الصيغة	الطـــرح	كيفية الإجابة
الصيغة الأولى (العادية)	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0.	نكتب الدستور: $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ حيث نعوض x_0 بقيمتها المُعطاة.
الصيغة الثانية	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيب y_0.	نحلّ المعادلة $\boxed{f(x_0) = y_0}$، وعند تعيين قيمة x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).
الصيغة الثالثة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **ميله (أو معامل توجيهه)** يساوي α.	نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0) = \alpha}$، وعند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية). **ملاحظة:** عدد الحلول يدلّ على عدد المماسات.
الصيغة الرابعة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يُوازي** المستقيم ذا المعادلة $y = \alpha x + \beta$.	نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0) = \alpha}$، عُدنا إلى الحالة الثانية. **ملاحظة:** مستقيمان متوازيان لهما نفس معامل التوجيه.
الصيغة الخامسة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يُعامد** المستقيم ذا المعادلة $y = \alpha x + \beta$.	نحلّ المعادلة $\boxed{\alpha \times f'(x_0) = -1}$. **ملاحظة:** مستقيمان متعامدان، جداء معاملي توجيههما يساوي (-1).
الصيغة السادسة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يشمل** النقطة ذات الإحداثيين $(x_M; y_M)$.	نحلّ المعادلة $\boxed{y_M = f'(x_0)(x_M - x_0) + f(x_0)}$، وعند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).

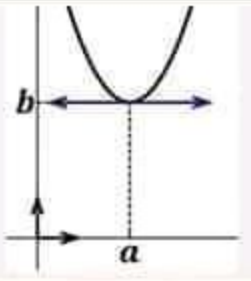
❻ إضافات:

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(a)$	↘	$-\infty$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(a)$	↗	$+\infty$

$$\begin{cases} f(a) = b \\ f'(a) = 0 \end{cases}$$





❼ استنتاج تمثيل بياني من آخر:

بعد إنشاء (C_f)، قد يُطلب منّا أنْ نستنتج منحنياً آخر (C_h) ـمثلاـ لدالة h؛ ويكون الاستنتاج حسب صيغة السؤال كما سيأتي:

الصيغة	الطـــرح	كيفية الإجابة
الصيغة الأولى	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h **حيث:** $\boxed{h(x) = \lvert f(x)\rvert}$.	• **على المجالات التي تكون فيها** $\boxed{f(x) \geq 0}$ (أي يكون فيها (C_f) على محور الفواصل أو فوقه) نحصل على $h(x) = f(x)$؛ ومنه (C_h) **ينطبق على** (C_f). • **على المجالات التي تكون فيها** $\boxed{f(x) \leq 0}$ (أي يكون فيها (C_f) على محور الفواصل أو تحته) نحصل على $h(x) = -f(x)$؛ ومنه يكون (C_h) **نظير** (C_f) **بالنسبة إلى محور الفواصل.**
الصيغة الثانية	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h **حيث:** $\boxed{h(x) = f(\lvert x\rvert)}$. **ملاحظة:** عادةً ما يُطلب منّا أوّلا أن نثبت أنّ h **زوجية.**	• إذا كان $x \geq 0$ و $x \in D_f$ أي $\boxed{x \in D_f \cap [0;+\infty[}$ (x ينتمي إلى الجزء الموجب من D_f) نحصل على $h(x) = f(x)$؛ ومنه (C_h) **ينطبق على** (C_f). • نُكمل الجزء المتبقي من (C_h) **بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأنّ** h **زوجية.**
الصيغة الثالثة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h **حيث:** $\boxed{h(x) = f(-\lvert x\rvert)}$. **ملاحظة:** عادةً ما يُطلب منّا أوّلا أن نثبت أنّ h **زوجية.**	• إذا كان $x \leq 0$ و $x \in D_f$ أي $\boxed{x \in D_f \cap]-\infty;0]}$ (x ينتمي إلى الجزء السالب من D_f) نحصل على $h(x) = f(x)$؛ ومنه (C_h) **ينطبق على** (C_f). • نُكمل الجزء المتبقي من (C_h) **بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأنّ** h **زوجية.**
الصيغة الرابعة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h **حيث:** $\boxed{h(x) = -f(x)}$.	• (C_h) **هو نظير** (C_f) **بالنسبة إلى محور الفواصل.**
الصيغة الخامسة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h **حيث:** $\boxed{h(x) = f(-x)}$.	• (C_h) **هو نظير** (C_f) **بالنسبة إلى محور التراتيب.**
الصيغة السادسة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h **حيث:** $h(x) = -f(-x)$.	• (C_h) **هو نظير** (C_f) **بالنسبة إلى مبدأ المعلم.**
الصيغة السابعة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h **التي تحقق:** $\boxed{h(x) = f(x+b) + k}$.	• نستنتج (C_h) **من** (C_f) **بالانسحاب ذي الشعاع** $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\k\end{pmatrix}$. (أي (C_h) **صورة** (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\k\end{pmatrix}$)
الصيغة الثامنة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h **التي تحقق:** $\boxed{h(x) = f(x) + k}$.	• هذه الصيغة هي الصيغة السابعة في حالة $\boxed{b = 0}$. • (C_h) **صورة** (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$.
الصيغة التاسعة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h **التي تحقق:** $\boxed{h(x) = f(x+b)}$.	• هذه الصيغة هي الصيغة السابعة في حالة $\boxed{k = 0}$. • (C_h) **صورة** (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-b\vec{i}$.
الصيغة العاشرة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h **التي تحقق:** $\boxed{h(x) = kf(x)}$؛ $k \in \mathbb{R}^*$.	• نحصل على نقطة من (C_h) **ذات الفاصلة** x **بضرب ترتيب النقطة** M **في العدد** k؛ **حيث** M **نقطة من** (C_f) **فاصلتها** x.

الاستمرارية

f دالة معرّفة على مجال I من $\mathbb{R}$، إذا كانت f مستمرة على I فإنّ **تفسيرها البياني (أو الهندسي)** هو: أنّه يُمكن رسم منحناها البياني على I دون رفع القلم (اليد).

نتائج:

- ☑ **الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- ☑ **الدوال كثيرات الحدود**، "cos" و"sin" هي دوال **مستمرة على** $\mathbb{R}$.
- ☑ **الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود)** هي دوال **مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- ☑ **مجموع، جداء وتركيب** دوال مستمرة **هي** دوال مستمرة.

❽ مبرهنة القيم المتوسطة:

مبرهنة القيم المتوسطة

الحالة العامة $k \in \mathbb{R}$	الحالة الخاصة $k = 0$
نص المبرهنة:	
إذا كانت f دالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$، من أجل كل عدد حقيقي k **محصور** بين $f(a)$ و $f(b)$، فإنّ: المعادلة $f(x)=k$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$.	إذا كانت f دالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$، وكان 0 **محصور** بين $f(a)$ و $f(b)$، أي: $f(a)\times f(b)<0$ فإنّ: المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$.
التفسير الهندسي (أو البياني) لمبرهنة القيم المتوسطة:	
المنحنى (C_f) **يقطع** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=k}$ **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** حامل محور الفواصل **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$.
وحدانية الحل:	
إذا كانت f دالة **معرّفة ومستمرة ورتيبة تماما** على المجال $[a;b]$، من أجل كل عدد حقيقي k **محصور** بين $f(a)$ و $f(b)$، فإنّ: المعادلة $f(x)=k$ **تقبل حلا وحيدا** α في المجال $[a;b]$.	إذا كانت f دالة **معرّفة ومستمرة ورتيبة تماما** على المجال $[a;b]$، وكان 0 **محصور** بين $f(a)$ و $f(b)$، أي: $f(a)\times f(b)<0$ فإنّ: المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α في المجال $[a;b]$.
التفسير الهندسي (أو البياني) لمبرهنة القيم المتوسطة:	
المنحنى (C_f) **يقطع** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=k}$ **في نقطة واحدة فاصلتها** α في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** حامل محور الفواصل **في نقطة واحدة فاصلتها** α في المجال $[a;b]$.

طرق إثبات وُجود حلول معادلة في مجال $[a;b]$ بإستعمال مبرهنة القيم المتوسطة:

1/نكتب المعادلة من الشكل $f(x)=k$ (إن لم تُعطى لنا) 2/نتحقق من استمرارية الدّالة f على المجال $[a;b]$. 3/نتحقق من أنّ k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، وذلك بعد حسابهما.	1/نكتب المعادلة من الشكل $f(x)=0$ (إن لم تُعطى لنا) 2/نتحقق من استمرارية الدّالة f على المجال $[a;b]$. 3/نتحقق من أنّ $\boxed{f(a)\times f(b)<0}$، وذلك بعد حسابهما.

ملاحظة:

تقبل المبرهنات السابقة عدة تمديدات في حالة الدّالة f مستمرة ورتيبة تماما على مجال مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين، محدود أو غير محدود. (في حالة المجال مفتوح نستعمل النهايات)

صورة مجال بواسطة دالّة مستمرة:

المجال I	f دالة متزايدة تماما على I	f دالة متناقصة تماما على I
$f(I)$	$f(I)$	$f(I)$
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x);f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)\right[$

⑨ تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب، ومع حامل محور الفواصل:

	الطريقة	ونكتب
① تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب $(C_f)\cap(yy')$	▪ نحسب $\boxed{f(0)}$.	$(C_f)\cap(yy')=\{A(0;\dots)\}$
② تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل $(C_f)\cap(xx')$	▪ نحل المعادلة $\boxed{f(x)=0}$ في D_f.	$(C_f)\cap(xx')=\{A(\dots;0);B(\dots;0)\}$

⑩ وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): ax+b$:

الطريقة	إشارة الفرق	الوضعية النسبية
ندرس إشارة الفرق $f(x)-(ax+b)$	⊠ $f(x)-(ax+b)>0$	⊠ (C_f) يقع فوق (Δ).
	⊠ $f(x)-(ax+b)<0$	⊠ (C_f) يقع تحت (Δ).
	⊠ $f(x)-(ax+b)=0$	⊠ (C_f) يقطع (Δ).

ج) إشارة $ax + b$ $(a \neq 0)$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	مثل إشارة a	0	عكس إشارة a

ج) إشارة $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$:

لدراسة إشارة عبارة من الدرجة II

المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
حلول المعادلة $P(x) = 0$ في $\mathbb{R}$:		
$S = \emptyset$	$S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	$S = \{x_1; x_2\}$ حيث: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ؛ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
إشارة $P(x)$:		
x: $-\infty$ ، $+\infty$ ؛ $P(x)$: مثل إشارة a	x: $-\infty$ ، $-\frac{b}{2a}$ ، $+\infty$ ؛ $P(x)$: مثل إشارة a ، 0 ، مثل إشارة a	x: $-\infty$ ، x_1 ، x_2 ، $+\infty$ ؛ $P(x)$: مثل إشارة a ، 0 ، عكس إشارة a ، 0 ، مثل إشارة a (نفرض أنّ $x_1 < x_2$)
تحليل $P(x)$:		
لا يُمكن تحليل $P(x)$	$P(x) = a(x - x_0)^2$ $\left(x_0 = -\frac{b}{2a}\right)$	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

11 المناقشة البيانية:

- المعادلة من الشكل $f(x) = m$، m وسيط حقيقي. ← المناقشة أفقية موازية لمحور الفواصل.
- المعادلة من الشكل $f(x) = ax + \boxed{m}$، m وسيط حقيقي. ← المناقشة مائلة موازية للمستقيم ذو المعادلة $y = ax + \boxed{b}$.
- المعادلة من الشكل $f(x) = mx + b$، m وسيط حقيقي. ← المناقشة دورانية حول النقطة $A(0; b)$.
- المعادلة من الشكل $f(x) = f(m)$، m وسيط حقيقي. ← المناقشة أفقية موازية لمحور الفواصل.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P(x)$	مثل إشارة a	○	مثل إشارة a

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$P(x)$	مثل إشارة a	○	عكس إشارة a	○	مثل إشارة a