الأسئلة الشائعة في دراسة الدوال و كيفية الإجابة عليها

1) السلوك التقاربي / الوضع النسبي لمنحنى

السؤال	الإجابة
فسر بيانيا : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $x = a$
فسر بيانيا : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا يوازي حامل محور التراتيب معادلته $y = b$
فسر بيانيا : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = ax + b$
بين أن المستقيم $(\Delta): y = ax + b$ مقارب مائل لـ (C_f) .	نبين أن : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$.
بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلته خاص بشعبتي الرياضي و التقني رياضي	• إذا كان : $f(x) = ax + b + g(x)$. يكفي أن نبين : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$. ومعادلته هي : $y = ax + b$. • و إذا لم يكن ذلك نعين العددين a و b من $\mathbb{R}$ كما يلي : $a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$ و $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - ax\right)$
أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y = ax + b$. نطبق نفس الإجابة على السؤال : أدرس وضعية المنحنيين (C_f) و (C_g) بوضع : $D(x) = f(x) - g(x)$	ندرس إشارة الفرق : $D(x) = f(x) - y$. • $D(x) > 0$ معناه أن : (C_f) يقع فوق (Δ) . • $D(x) < 0$ معناه أن : (C_f) يقع تحت (Δ) . • $D(x) = 0$ معناه أن : (C_f) يقطع (Δ) .
فسر بيانيا : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - g(x) = 0$	(C_f) و (C_g) متقاربان بجوار $\pm\infty$.

2) عناصر تناظر منحنى / شفعية دالة

السؤال	الإجابة
بين أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)	يكفي أن نبين : $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$.
بين أن : $f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta$. ماذا تستنتج ؟	بعد الحساب نستنتج أن (C_f) متناظر بالنسبة $\Omega(\alpha;\beta)$
بين أن المستقيم $(d): x = \alpha$ محور تناظر للمنحنى (C_f)	يكفي أن نبين : $f(2\alpha - x) = f(x)$.
بين أن : $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$. ماذا تستنتج ؟	نستنتج أن : المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$ محور تناظر لـ (C_f)
بين أن f دالة فردية	نبرهن أن : $f(-x) = -f(x)$
بين أن f دالة زوجية	نبرهن أن : $f(-x) = f(x)$
بين أن : $f(-x) + f(x) = 0$. ماذا تستنتج ؟	نستنتج أن : f دالة فردية . و مبدأ المعلم مركز تناظر لـ (C_f)
بين أن : $f(-x) - f(x) = 0$. ماذا تستنتج ؟	نستنتج أن f دالة زوجية . و (C_f) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب
بين أن : $f(\alpha - x) + f(x) = \beta$. ماذا تستنتج ؟	نستنتج أن : (C_f) متناظر بالنسبة للنقطة $\Omega\left(\frac{\alpha}{2};\frac{\beta}{2}\right)$
بين أن : $f(\alpha - x) - f(x) = \beta$. ماذا تستنتج ؟	نستنتج أن : (C_f) متناظر بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $x = \frac{\alpha}{2}$

يعطى لك المنحنى (C_f) ممثلا في معلم . • حل بيانيا المعادلة $f(x)=0$ • إستنتج إشارة $f(x)$.	• حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل • بالنسبة للإشارة : المجالات التي يكون فيها (C_f) تحت محور الفواصل فإن $(f(x)<0)$ ، و المجالات التي يكون فيها (C_f) فوق محور الفواصل فإن $(f(x)>0)$.
أحسب $f(a)$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.	نجد $f(a)=0$ ثم نحدد المجالات : $f(x)$ إما موجبة أو سالبة
بين أن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $a\le\alpha\le b$	• أولا : نبين أن f مستمرة و رتيبة على المجال $[a;b]$. • ثانيا : نحسب كلا من $f(a)$ و $f(b)$ ثم نبين أن k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، وعليه يجد α من المجال $[a;b]$ يحقق : $f(x)=k$
بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث : $\alpha\in[a;b]$. و بصيغة أخرى : بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α .	• نبين أن f مستمرة و رتيبة على المجال $[a;b]$. • نحسب $f(a)$ و $f(b)$ ، ثم نجد : $f(a)\times f(b)<0$. ومنه يوجد α وحيد من المجال $[a;b]$ يحقق : $f(x)=0$.

4) العدد المشتق وتفسيره الهندسي

السؤال	الإجابة
قابلية : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=L$ أو : $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=L$ ، (L ثابت حقيقي)	• الدالة f تقبل الإشتقاق عند a ، و $f'(a)=L$. • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا معامل توجيهه $f'(a)$ أي : L .
قابلية : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=0$.	• الدالة f تقبل الإشتقاق عند a ، و $f'(a)=0$. • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل .
قابلية : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\pm\infty$	• الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند a . • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا رأسيا ، و تصف مماس موازي لحامل محور التراتيب معادلته $x=a$.
قابلية : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=L_1$ و : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=L_2$ ، حيث ($L_1\neq L_2$)	• الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند a . • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ نصفي مماسين معامل توجيههما L_1 و L_2 على الترتيب ، و تسمى النقطة A نقطة زاوية .

5) المماسات

السؤال	الإجابة
عين معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0	نكتب المعادلة: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. ثم نحسب كلا من $f'(x_0)$ و $f(x_0)$ ونعوض في المعادلة.
أكتب معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الترتيبة y_0	أي نبحث عن الفاصلة x_0 وذلك بحل المعادلة $f(x_0) = y_0$. ثم نكتب معادلة المماس عند x_0 .
عين بيانيا العدد المشتق: $f'(x_0)$. ملاحظة: معامل توجيه المماس $= f'(x_0)$.	نحسب معامل التوجيه: $f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$. حيث النقطتين A و B من المماس .
هل توجد مماسات لـ (C_f) معامل توجيهها a ؟.	نبحث عن الفاصلة x_0 بحل المعادلة $f'(x) = a$. أي عدد حلول المعادلة هي عدد المماسات التي معامل توجيهها a
هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم ذا المعادلة $(d): y = ax + b$ ؟.	نحل المعادلة: معامل توجيه $(d) = f'(x)$ أي $f'(x) = a$. إذا وجدنا حلول نقول يوجد مماسات لـ (C_f) موازية لـ (d)
هل توجد مماسات لـ (C_f) تشمل النقطة $A(\alpha, \beta)$ ؟.	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $\beta = f'(x_0)(\alpha - x_0) + f(x_0)$ عدد حلول المعادلة تمثل عدد المماسات.
هل توجد مماسات لـ (C_f) تعامد المستقيم ذا المعادلة $(d): y = ax + b$ ؟. (في معلم متعامد ومتجانس).	نبحث عن x_0 بحل المعادلة: $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$. (a هو معامل توجيه (d)) . وعدد الحلول يمثل عدد المماسات.

6) أحيانا تعطى لنا عبارة الدالة $f(x)$ بثوابت مجهولة $(a, b, c, \ldots\ldots)$ ويطلب منا تعيينها

علما أن عدد المعطيات المباشرة و غير المباشرة تكون بعدد الثوابت

المعطيات	ترجمتها إلى معادلات لتعيين الثوابت $(a, b, c, \ldots\ldots)$
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_0, y_0)$ يقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل. (أو يقبل ذروة في النقطة $A(x_0, y_0)$).	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$ ثم نعين الثوابت المجهولة.
(C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة x_0 مماسا يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = mx + k$.	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + k \\ f'(x_0) = m \end{cases}$
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_A; y_A)$ مماسا يشمل النقطة $B(x_B; y_B)$.	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_A) = y_A \\ f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \end{cases}$

7) رسم منحني (C_g) انطلاقا من المنحني (C_f)

إذا كـــان :	فـــإن :
$g(x) = -f(x)$	(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx')
$g(x) = f(\lvert x \rvert)$	g دالة زوجية، ولما : $x \geq 0$ يكون (C_g) منطبقا على (C_f).
$g(x) = \lvert f(x) \rvert$	• (C_g) ينطبق على (C_f) في المجالات التي تكون فيها f موجبة. • (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى (xx') في المجالات التي تكون فيها f سالبة.

بالتوفيق لجميع طلبتنا الأعزاء في بكالوريا 2019

الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

دراسة دالة عددية رقم 01

الجزء الأول :

لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^4 - 4x - 3$.

1) ادرس تغيّرات الدالة g (تحسب النهايات عند $+\infty$ وَ $-\infty$).

2) أ) بيّن انّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّين بالضبط α وَ β ، حيث : $\alpha < 0 < \beta$.

ب) تحقّق انّ : $-0,7 < \alpha < -0,69$ وَ $1,78 < \beta < 1,79$.

ج) عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني :

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^3 - 1}$ ، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ وحدته $(2cm)$.

1) عيّن نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) أ) عيّن الأعداد الحقيقية : a ، b ، c ، d ، e حيث : $f(x) = ax + b + \dfrac{ex^2 + dx + e}{x^3 - 1}$ وَ $(x \neq 1)$.

ب) إستنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحني (C_f) يطلب تعيين معادلته .

ج) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3) أ) بيّن انّه من اجل كل $x \neq 1$ يكون : $f'(x) = \dfrac{x^2 \times g(x)}{(x^3 - 1)^2}$.

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

ج) اعط حصرا لكل من : $f(\alpha)$ وَ $f(\beta)$.

4) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .

5) انشئ كلا من المماس (T) وَ (Δ) وَ المنحني (C_f) .

6) h هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $h(x) = \dfrac{x^4 + 1}{|x^3 - 1|}$.

أ) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

ب) إشرح كيف يتم إنشاء (C_h) المنحني الممثل للدالة h ، إنطلاقا من المنحني (C_f) .

ج) انشئ المنحني (C_h) في نفس المعلم السابق .

ب) نعلم انّ : $\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{x+1}{x^3-1} \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{x+1}{x^3-1} = 0 \end{cases}$ ، إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ج) الوضعية : ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$ ، اي : $f(x) - x = \dfrac{x+1}{x^3-1}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x^3-1		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$+$		$-$	‖	$+$	
الوضعية		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(-1;1)$	(C_f) يقع تحت (Δ)	‖	(C_f) يقع فوق (Δ)	

3) الدالة المشتقة : الدالة f قابلة للإشتقاق من اجل كل x يختلف عن 1 و دالتها المشتقة هي :

$f'(x) = \dfrac{4x^3(x^3-1) - 3x^2(x^4+1)}{(x^3-1)^2}$ ، اي : $f'(x) = \dfrac{x^2 \times \left[4x(x^3-1) - 3(x^4+1)\right]}{(x^3-1)^2}$ ، اي :

$f'(x) = \dfrac{x^2(4x^4 - 4x - 3x^4 - 3)}{(x^3-1)^2}$ ، اي : $f'(x) = \dfrac{x^2(x^4 - 4x - 3)}{(x^3-1)^2}$ ، و منه : $f'(x) = \dfrac{x^2 \times g(x)}{(x^3-1)^2}$.

و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة : $x^2 \times g(x)$ ، و هي موضحة في الجدول المقابل

x	$-\infty$		α		0		1		β		$+\infty$
x^2		$+$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$			$-$		‖	$-$		$+$	
$x^2 \times g(x)$		$+$		$-$		$-$	‖	$-$		$+$	

جدول التغيرات

x	$-\infty$		α		1		β		$+\infty$
$f'(x)$			0		‖		0		
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

ج) حصرا كل من $f(\alpha)$ وَ $f(\beta)$:

1) حصر $f(\alpha)$:

لدينا : $-0,7 < \alpha < -0,69$ ، اي : $0,23 < \alpha^4 < 0,240$ ، اي : $1,23 < \alpha^4 + 1 < 1,240$.....(1)

وَ $-0,34 < \alpha^3 < -0,33$ ، اي : $-1,34 < \alpha^3 - 1 < -1,33$ ، اي : $\frac{1}{-1,34} < \frac{1}{\alpha^3 - 1} < \frac{1}{-0,33}$ ،

اي : $\frac{1}{0,34} < -\frac{1}{\alpha^3 - 1} < \frac{1}{1,33}$.....(2)

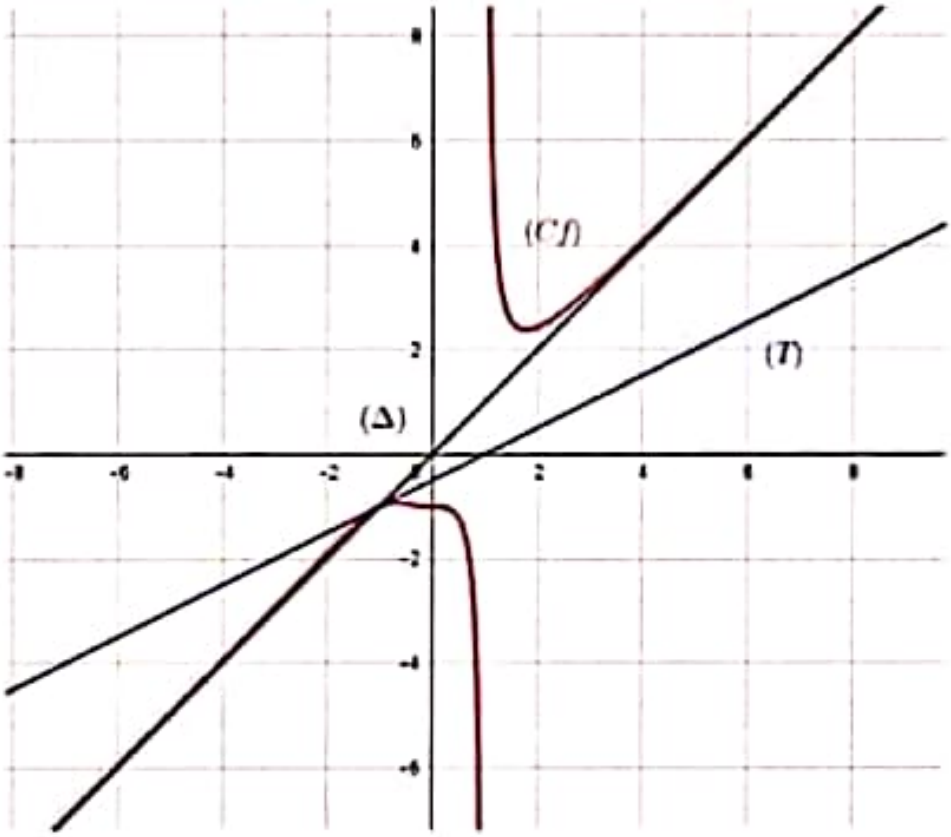
بضرب (1) وَ (2) نجد : $\frac{1,23}{0,34} < -\frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^3 - 1} < \frac{1,24}{1,33}$ ، اي : $0,92 < -\frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^3 - 1} < 0,93$ ،

و منه : $-0,93 < \frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^3 - 1} < -0,92$ ، إذن : $-0,93 < f(\alpha) < -0,92$.

2) حصر $f(\beta)$: نفس الطريقة مثل حصر $f(\alpha)$ ، و نجد انّ : $2,33 < f(\beta) < 2,42$.

4) معادلة المماس : $(T) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ ، و منه : $(T) : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

5) الإنشـــاء :



6) لدينا : $h(x) = \frac{x^4 + 1}{|x^3 - 1|}$.

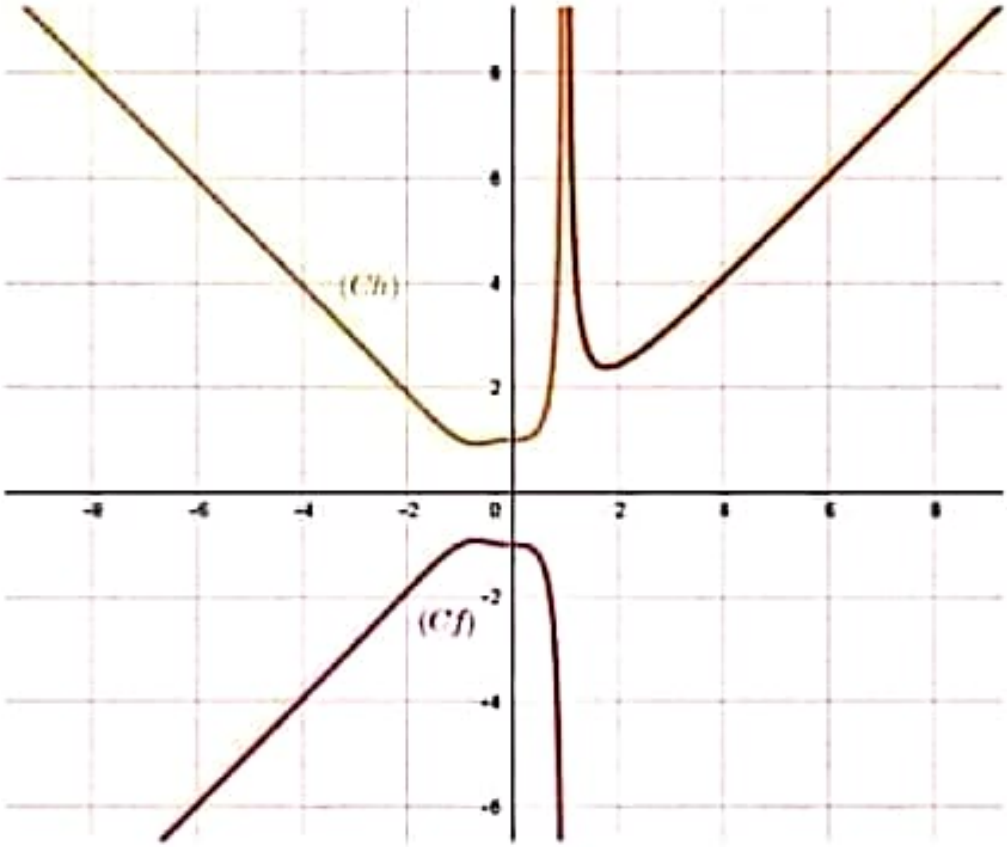
أ) كتابة الدالة h دون رمز القيمة المطلقة :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} = f(x).....(x > 1) \\ -\frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} = -f(x).....(x < 1) \end{cases}$$

ب) (C_h) ينطبق على (C_f) على $]1;+\infty[$.

(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل على $]-\infty;1[$.

ج) الإنشـــاء :



كتابة الأستاذ : ب . ع

دراسة دالة عددية رقم 02

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، وحدته $(5.cm)$.

نعتبر المنحني (C) الذي معادلته في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي : $x(x^2+y^2)+y^2-3x^2=0$.

1) نفرض الدالة f المعرّفة على $]-1;3]$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2(3-x)}{x+1}}$.

❖ بيّن أنّ المنحني (C) هو إتحاد المنحنيين (C_1) وَ (C_2) الممثلين للدالتين f وَ $-f$ على الترتيب .

2) أ) عيّن كلا من : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ وَ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج ؟ .

ب) فسّر النتائج هندسيا .

3) احسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ، ماذا تستنتج ؟ .

4) أ) بيّن انه من اجل كل $x \in]-1;0[\cup]0;3[$ يكون : $f'(x)=\dfrac{3x-x^3}{(x+1)\sqrt{x^2(x+1)(3-x)}}$.

ب) إستنتج إشارة $f'(x)$.

ج) احسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسياً .

د) شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

5) انشئ (C_1) ، ثمّ اكمل إنشاء المنحني (C) .

حل مختصر للدالة العددية رقم 02

1) (C) هو المنحني الذي معادلته : $x(x^2+y^2)+y^2-3x^2=0$ ، أي : $x^3+xy^2+y^2-3x^2=0$ ، أي :

$y^2(x+1)=3x^2-x^3$ ، ومنه : $y^2=\frac{3x^2-x^3}{x+1}$ ، إذن : $y=\sqrt{\frac{3x^2-x^3}{x+1}}$ أو : $y=-\sqrt{\frac{3x^2-x^3}{x+1}}$ ، أي :

$y=\sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}}$ أو $y=-\sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}}$ ، ومنه : $y=f(x)$ أو $y=-f(x)$ مع $x\in\left]-1;3\right]$.

وعليه نقول أنّ (C) هو إتحاد المنحنيين (C_1) وَ (C_2) الممثلين للدالتين f وَ $-f$ على الترتيب.

2) أ) تعيين النهايات :

❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\sqrt{\frac{x^2(x+1)}{x+1}}}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{x\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}=\sqrt{3}$.

❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}}}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{-x\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}-\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}=-\sqrt{3}$.

نستنتج أنّ الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 0 .

ب) التفسير الهندسي : نقول أنّ المنحني (C_1) يقبل عند النقطة $O(0;0)$ نصفي مماسين (T_1) وَ (T_2) معامل توجيههما $\sqrt{3}$ وَ $-\sqrt{3}$ على الترتيب ، والنقطة O هي نقطة زاوية.

3) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\frac{\sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x}}-0}{x-3}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}x\times\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}\times\frac{1}{x-3}$ ، أي :

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}x\times\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}\times\frac{-1}{3-x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}x\times\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}\times\frac{-1}{(\sqrt{3-x})^2}$ ، ومنه :

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\frac{-x}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{3-x})}=-\infty\begin{cases}-3\\0^+\end{cases}$.

❖) نستنتج أنّ الدالة f لا تقبل الإشتقاق على يسار 3 وَ المنحني (C_1) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة $(3;0)$

4) حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{\frac{(6x-3x^2)(x+1)-(3x^2-x^3)}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{3x^2-x^3}{x+1}}}=\frac{6x^2+6x-3x^3-3x^2-3x^2+x^3}{(x+1)^2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{x+1}{3x^2-x^3}}$$

أي : $f'(x)=\frac{-2x^3+6x}{(x+1)^2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x^2-x^3}}=\frac{2(-x^3+3x)}{(\sqrt{x+1})^4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x^2-x^3}}$ ، أي :

$$f'(x)=\frac{-x^3+3x}{(\sqrt{x+1})^3}\times\frac{1}{\sqrt{3x^2-x^3}}=\frac{-x^3+3x}{(x+1)\sqrt{x+1}}\times\frac{1}{\sqrt{3x^2-x^3}}=\frac{3x-x^3}{(x+1)\sqrt{(x+1)(3x^2-x^3)}}$$

ومنه : $f'(x) = \dfrac{3x - x^3}{(x+1)\sqrt{x^2(x+1)(3-x)}}$ ، وهو المطلوب.

ب) نلاحظ انّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $(3x - x^3)$:

لدينا : $3x - x^3 = x(3 - x^2) = x(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$. سنلخص الإشارة في الجدول التالي :

* ممكن دراسة الإشارة على $\mathbb{R}$ ، ثم في جدول التغيرات نأخذ الإشارة فقط على D_f .

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$-\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$3 - x^2$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$(3x - x^3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

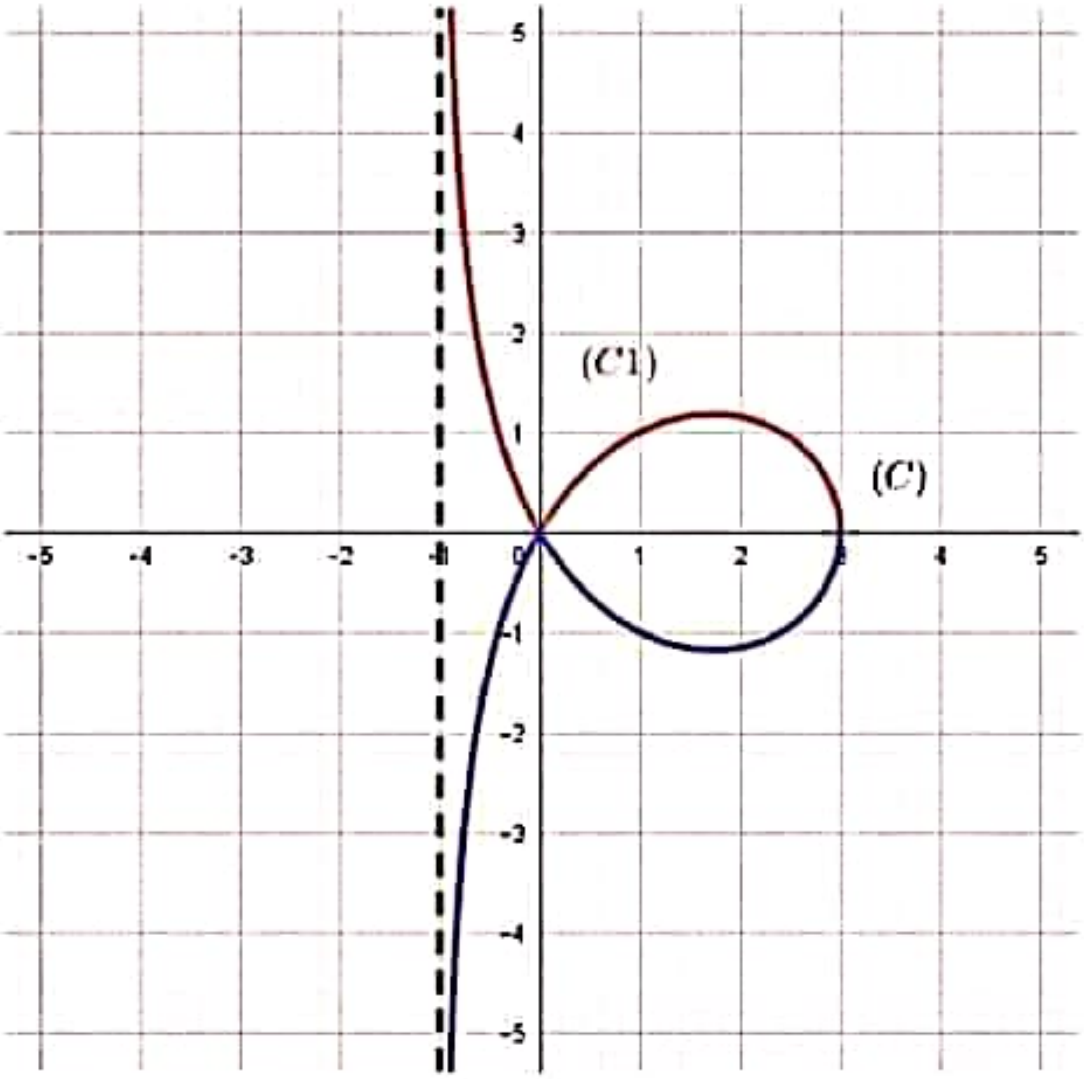
ج) حساب النهاية :

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty \begin{cases} 2 \\ 0^+ \end{cases}$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحني (C_1) .

د) جدول تغيرات الدالة f :

x	-1		0		$\sqrt{3}$		3
$f'(x)$		$-$	|	$+$	0	$-$	|
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1,5$	$\searrow$	0

5) الإنشـــاء :



كتابة الأستاذ : بن.ع

دراسة دالة عددية رقم 03

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{-x^3-2x^2+7x+12}{(x+2)^2}$.

و ليكن (C_f) المنحني الممثّل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب) فسّر هندسيا النهاية عند -2 .

2) أ) عيّن الأعداد الحقيقية: a ، b ، c ، d بحيث من أجل كل x يختلف عن -2 تكون:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}+\frac{d}{(x+2)^2}\ .$$

ب) إستنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ج) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

3) أ) بيّن انه من أجل كل $x=-2$ تكون: $f'(x)=\dfrac{(-x-1)(x^2+5x+10)}{(x+2)^3}$.

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) أ) احسب: $f(-3)$ ، ثمّ حدّد نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

ب) حدّد أيضا نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور التراتيب.

5) انشئ المنحني (C_f) .

6) m عدد حقيقي. عيّن قيم m حتى يكون للمعادلة: $f(x)=m$ ثلاث حلول سالبة.

7) g هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=f(|x|)$.

أ) بيّن أنّ الدالة g زوجية.

ب) إشرح كيف يتم إنشاء المنحني (C_g) إنطلاقاً من المنحني (C_f) .

ج) انشئ المنحني (C_g) في نفس المعلم السابق.

حل مختصر للدالة رقم 03

1) أ) حساب نهايات الدالة f :

• $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$.

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$.

• $\lim_{x\overset{<}{\to}-2} f(x) = -\infty \begin{cases} -2 \\ 0^+ \end{cases}$ ، • $\lim_{x\overset{>}{\to}-2} f(x) = -\infty \begin{cases} -2 \\ 0^+ \end{cases}$.

ب) التفسير الهندسي : المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = -2$.

2) أ) $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{(x+2)^2} = \frac{ax(x+2)^2 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d}{(x+2)^2}$ ، أي :

$f(x) = \frac{ax^3 + 4ax^2 + 4ax + bx^2 + 4bx + 4b + cx + 2c + d}{(x+2)^2}$ ، بالمطابقة نجد :

$\begin{cases} a = -1 \\ 4a + b = -2 \\ 4a + 4b + c = 7 \\ 4b + 2c + d = 12 \end{cases}$ ، ومنه : $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = -2 \end{cases}$ ، إذن : $f(x) = -x + 2 + \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}$.

ب) بما أنّ : $f(x) = -x + 2 + \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}$ وَ $\lim_{|x|\to\infty}\left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}\right) = 0$.

إذن يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) معادلته : $(\Delta) : y = -x + 2$ بجواري $-\infty$ وَ $+\infty$.

ج) دراسة الوضعية :

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - (-x + 2) = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{3x+4}{(x+2)^2}$.

x	$-\infty$	-2		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$\frac{3x+4}{(x+2)^2}$	$-$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية	(C_f) يقع تحت (Δ)	‖	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) عند النقطة $(\frac{-4}{3};\frac{10}{3})$	(C_f) يقع فوق (Δ)	

3) أ) حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(-3x^2-4x+7)(x+2)^2-2(x+2)(-x^3-2x^2+7x+12)}{(x+2)^4}$$ ، أي :

$$f'(x)=\frac{(x+2)\left[(-3x^2-4x+7)(x+2)-2(-x^3-2x^2+7x+12)\right]}{(x+2)^4}$$ ، أي :

$$f'(x)=\frac{-3x^3-6x^2-4x^2-8x+7x+14+2x^3+4x^2-14x-24}{(x+3)^3}$$ ، أي :

$f'(x)=\dfrac{-x^3-6x^2-15x-10}{(x+3)^3}$ ، بملاحظة أنّ : $(-x-1)(x^2+5x+10)=-x^3-6x^2-15x-10$

و منه : $f'(x)=\dfrac{(-x-1)(x^2+5x+10)}{(x+2)^3}$ ، و هو المطلوب.

ب) ❖) جدول الإشارة :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$-x-1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x^2+5x+10$		$+$		$+$		$+$	
$(x+2)^3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

ملاحظة : (إشارة $(x+2)^3$ من إشارة $x+2$ ، و إشارة $x^2+5x+10$ هي نفس إشارة a لأنّ : $\Delta<0$).

❖) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

4) أ) $f(-3)=0$ ، لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل نحل المعادلة : $f(x)=0$ ،

أي : $-x^3-2x^2+7x+12=0$ ، بما أنّ : $f(-3)=0$ فإنّ : -3 هو جذر لـ $(-x^3-2x^2+7x+12)$ ،

إذن : $-x^3-2x^2+7x+12=(x+3)(ax^2+bx+c)$ ، أي :

$-x^3-2x^2+7x+12=ax^3+bx^2+cx+3ax^2+3bx+3c$ ، أي :

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a=-1 \\ b+3a=-2 \\ c+3b=7 \\ 3c=12 \end{cases}$ ، و منه: $\begin{cases} a=-1 \\ b+3a=1 \\ c=4 \end{cases}$.

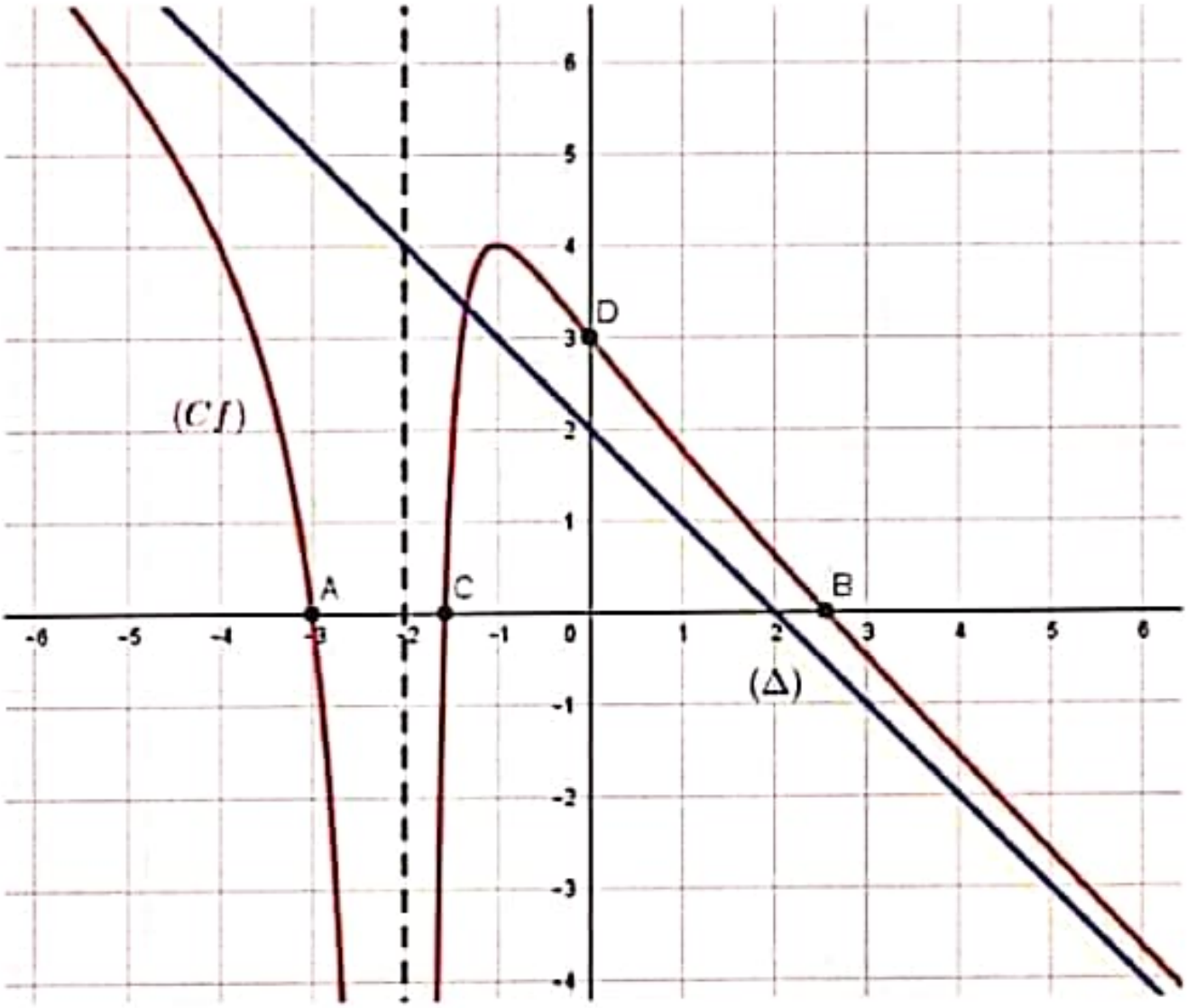
إذن: $-x^3-2x^2+7x+12=(x+3)(-x^2+x+4)$.

إما: $\begin{cases} x+3=0 \\ x=-3 \end{cases}$ ، أو: $-x^2+x+4=0$ ، أي: $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{-2}$ و $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{-2}$.

و منه: (C_f) يقطع حامل محور الفواصل عند: $A(-3;0)$ ، $B(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};0)$ و $C(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2};0)$.

ب) إيجاد نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب، أي نحسب: $f(0)=3$ ، و منه النقطة: $D(0;3)$.

5) الإنشـــاء:



6) المعادلة: $f(x)=m$ ، تقبل ثلاث حلول سالبة لما: $3<m<4$ ، (أنظر الإنشاء).

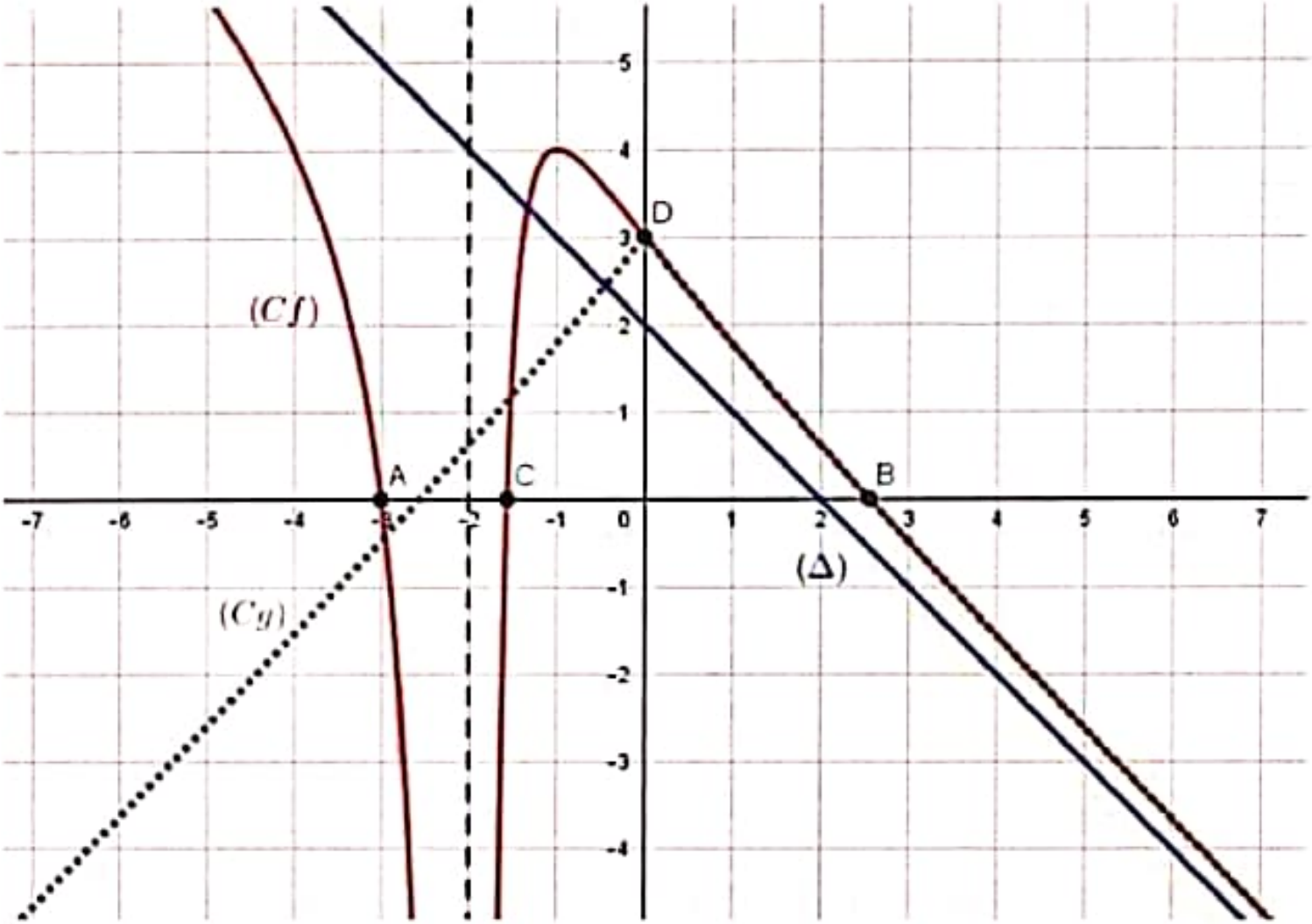
7) لدينا: $g(x) = f(|x|)$.

ا) إثبات ان الدالة g زوجية: $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$ ، إذن g زوجية.

ب) ◆ إذا كان: $x \geq 0$ فإنّ: $|x| = x$ ، و منه: $g(x) = f(x)$ ، إذن: (C_g) ينطبق على (C_f) في المجال $[0;+\infty[$

◆ ثم ننشئ (C_g) بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لأنّ الدالة g زوجية.

ج) الإنشـــــاء:



كتابة الأستاذ : ب.ع

دراسة دالة عددية رقم 04

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x} \ .....; x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2} \ ....; x > 0 \end{cases}$.

وَ ليكن (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ وَ $-\infty$ ، ثمّ فسّر بيانياً النتيجة عند $-\infty$.

2) ادرس إستمرارية الدالة f عند 0 .

3) أ) احسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{f(x)}{x}$. ماذا يمكن القول بالنسبة للدالة f ؟ . وَ ما هو التفسير الهندسي لهذه النتيجة ؟ .

ب) بيّن أنه من اجل كل x من $]-\infty;0[$ تكون : $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-2x} \times (\sqrt{x^2-2x} - x + 1)}$ ،

وَ من اجل كل x من $]0;+\infty[$ تكون : $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2 \times (x+2)}{x^3}$.

ج) شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

4) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x - 3$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

5) بيّن أنّ المنحني (C) يقبل نقطة إنعطاف A يطلب تعيين إحداثياها .

6) انشئ المستقيمات المقاربة وَ المنحني (C) .

حل مختصر للدالة رقم 04

لدينا :
$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x} \ .....; x \le 0 \\ f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2} \ ....; x > 0 \end{cases}$$

1) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x + \sqrt{x^2 - 2x}\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x + \sqrt{x^2 - 2x}\right] \times \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}}$ ، اي :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x - \sqrt{x^2(1 - \frac{2}{x})}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x + x\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}$ ، $(\sqrt{x^2} = -x; x \le 0)$

ومنه : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x\left[1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right]} = 1$ ، إذن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

❖) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-1)^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = +\infty$.

2) دراسة إستمرارية الدالة f عند 0 :

لدينا : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^{\substack{-\\+}}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^{\substack{-\\+}}} \dfrac{(x-1)^3}{x^2} = -\infty \begin{cases} -1 \\ 0^+ \end{cases} \end{cases}$ ، إذن : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \ne f(0)$.

ومنه نقول أنّ الدالة f ليست مستمرة عند 0 .

3) أ) حساب : $\lim\limits_{x \to 0^{\substack{-\\+}}} \dfrac{f(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x \to 0^{\substack{-\\+}}} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^{\substack{-\\+}}} \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^{\substack{-\\+}}} \dfrac{x + \sqrt{x^2(1 - \frac{2}{x})}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^{\substack{-\\+}}} \dfrac{x\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right]}{x} = -\infty$.

❖) إذن : نقول أنّ الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند 0 .

❖) التفسير الهندسي : المنحني (C) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة $O(0;0)$.

ب) ❖) حساب $f'(x)$ على $]-\infty;0[$:

$$f'(x) = 1 + \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = 1 + \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \times \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1)}{\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1)}$$

اي : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - (x-1)^2}{\sqrt{x^2 - 2x} \times \sqrt{x^2 - 2x} - x + 1} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2 - 2x} \times (\sqrt{x^2 - 2x} - x + 1)}$.

نلاحظ انّه من اجل $x \in]-\infty;0[$ يكون : $\sqrt{x^2 - 2x} \times \sqrt{x^2 - 2x} - x + 1 > 0$.

و بالتالي ستكون : $f'(x) < 0$ ، اي انّ الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;0[$.

❖ حساب $f'(x)$ على $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{3(x-1)^2 \times x^2 - 2x \times (x-1)^3}{x^4} = \frac{x(x-1)^2[3x-2(x-1)]}{x^4} = \frac{x(x-1)^2 \times (x+2)}{x^4} ،$$

و منه : $f'(x) = \frac{(x-1)^2 \times (x+2)}{x^3}$.

نلاحظ انه من اجل $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) \geq 0$ ، (لأنّ : $f'(x)$ تنعدم من اجل $x = 1$) .

و منه : الدالة f متزايدة على $]0;+\infty[$.

ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0 ‖ $-\infty$	↗		↗	$+\infty$

توضيح مهم : الشيء الجديد بالنسبة للطلبة هو انّ الدالة f معرفة عند 0 ، اي : $f(0) = 0$ ، لكن نهاية الدالة f على يمين 0 هي $-\infty$.

4) ا) نبيّن انّ المستقيم (Δ) مقارب للمنحني (C) بجوار $+\infty$ ، اي :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-3) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x-1)^3}{x^2} - (x-3)\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 1 - x^2(x-3)}{x^2} ،$$ اي :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-3) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0 .$$

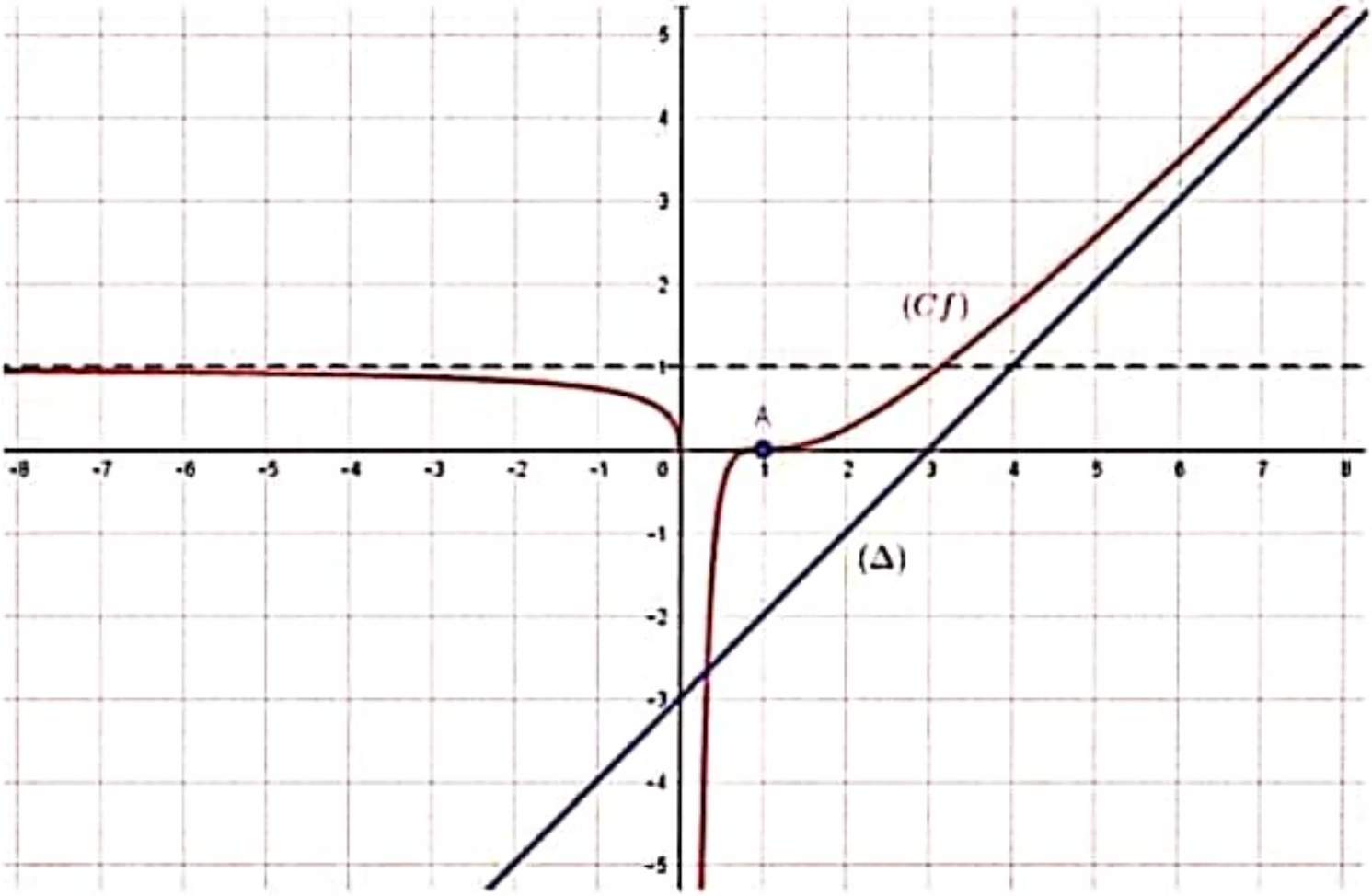
و منه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

ب) الوضعية : اي ندرس إشارة $\frac{3x-1}{x^2}$ ، و منه الإشارة من إشارة $3x-1$

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$		$+$	
الوضعية		(C) يقع تحت (Δ)	(C) يقطع (Δ) عند النقطة $(\frac{1}{3};-\frac{8}{3})$	(C) يقع فوق (Δ)	

5) نلاحظ من خلال جدول التغيرات للدالة f أنّ الدالة f' تنعدم عند 1 و لا تغيّر إشارتها ،
إذن النقطة $A(1,f(1))$ هي نقطة إنعطاف للمنحني (C) ، اي : النقطة $A(1,0)$.

6) الإنشاء :



كتابة الأستاذ : ب.ع

دراسة دالة عددية رقم 05

الجزء الأول:

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x - \sqrt{1+x^2}$.

و ليكن (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسياً.

ب) بيّن أنّ المستقيم (d) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

2) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $\sqrt{1+x^2} - x > 0$.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

ج) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

3) أ) انشئ المماس (T) و المنحني (C) .

ب) حل بيانياً المتراجحة: $f(x) > 2x - 1$.

ج) تحقّق أنّه من أجل كل $x > 0$ يكون: $x(1 + f(\frac{1}{x})) = 1 + f(x)$.

الجزء الثاني:

لتكن الدالة g المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ بـ: $\begin{cases} g(x) = \tan x - \sqrt{1+\tan^2 x} \text{ .....} -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ g(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

و ليكن (Γ) هو المنحني الممثل للدالة g .

1) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$.

2) احسب: $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} g(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسياً.

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ يكون: $g(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x}$.

ب) ادرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ انشئ منحناها (Γ) في معلم آخر.

الجزء الثالث:

لتكن الدالة h المعرّفة على $]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} h(x) = x - \sqrt{1+x^2} \text{ .....} x \le 0 \\ h(x) = 2 - x - \sqrt{x^2 - 4x + 5} \text{ .....} x \ge 2 \end{cases}$

1) بيّن أنّ المستقيم الذي معادلته: $x = 1$ هو محور تناظر للمنحني (C_h) .

2) شكل جدول تغيّرات الدالة h .

3) انشئ (C_h) في نفس معلم الدالة f .

المسألة مأخوذة من أحد كتب المغرب الشقيق مع تعديل يوافق المنهاج الجزائري

حل مختصر للدالة رقم 05

الجزء الأول :

1) أ) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt{1+x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\times x+\sqrt{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}=0\left\{\begin{matrix}-1\\+\infty\end{matrix}\right.$$

إذن المنحني (C) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب بجوار $+\infty$.

ب) بيان أنّ المستقيم (d) مقارب مائل بجوار $-\infty$ ، أي نحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to-\infty}-x-\sqrt{1+x^2}$ ، أي :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x=(-x-\sqrt{1+x^2})\times\frac{-x+\sqrt{1+x^2}}{-x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{-1}{-x+\sqrt{1+x^2}}=0\left\{\begin{matrix}-1\\+\infty\end{matrix}\right.$$.

إذن المستقيم (d) مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

2) أ) بيان أنّ : $\sqrt{1+x^2}-x>0$ من أجل عدد حقيقي x ، نميّز حالتين :

❖ حالة $x\geq 0$ يكون : $\sqrt{1+x^2}-x=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}>0$.

❖ حالة $x<0$ يكون : $\sqrt{1+x^2}-x>0$. ومنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $\sqrt{1+x^2}-x>0$.

ب) حساب f' ، $f'(x)=1-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=1-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}}>0$.

ومنه : الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

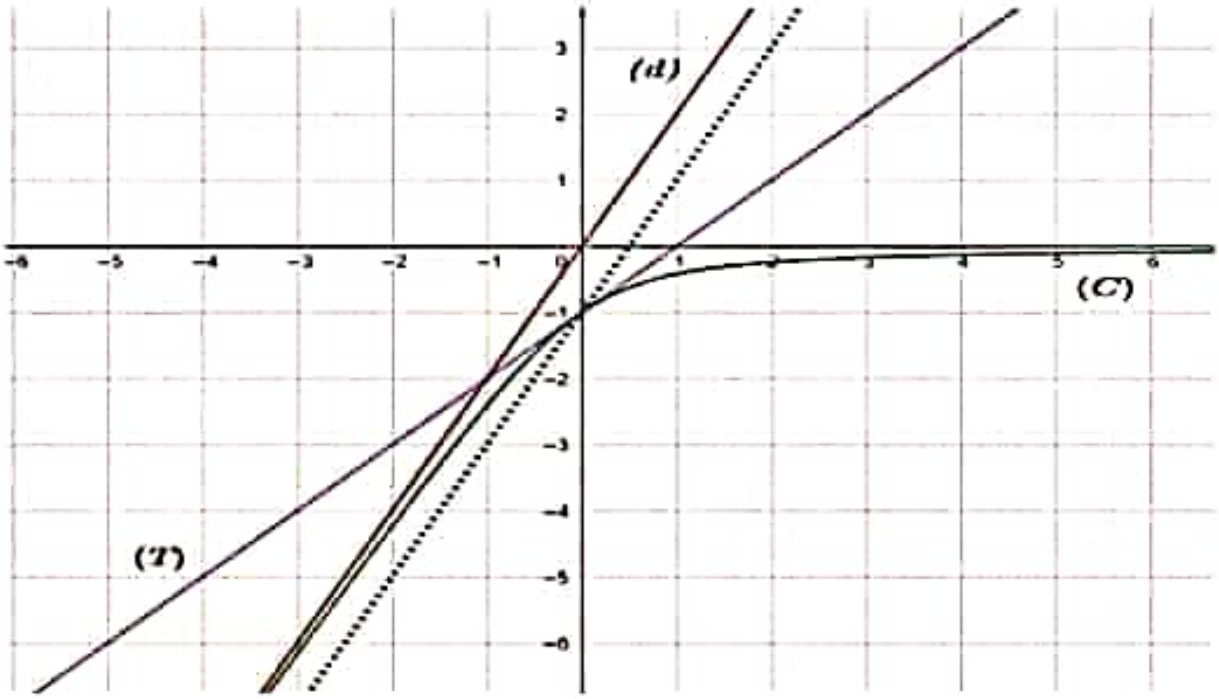
❖ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0

□

ج) معادلة المماس : $(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، ومنه : $(T): y=x-1$.

3) أ) الإنشاء :



ب) حل المتراجحة : $f(x) > 2x - 1$ (الحلول هي المجالات التي يكون فيها المنحني (C) فوق المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - 1$) إذن : $S = \left]-\infty;0\right[$.

ج) من اجل كل $x > 0$ يكون : $x(1+f(\frac{1}{x})) = x(1+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) = x+1-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x+1-x\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$

اي : $x(1+f(\frac{1}{x})) = x+1-\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x} = x-\sqrt{x^2+1}+1 = f(x)+1$ ، $(\sqrt{x^2} = x \;.....; x > 0)$.

الجزء الثاني :

1) بيان أنّ : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$.

لدينا : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \left[\tan x - \sqrt{1+\tan^2 x}\right] = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} f(\tan x)$ ، اي :

$\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \tan x = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty \begin{cases} 1 \\ 0^+ \end{cases} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$ ، ومنه : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = 0$ ، اي : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$.

2) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x)$:

اي : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} f(\tan x)$ ، اي : $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} \tan x = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty \begin{cases} -1 \\ 0^+ \end{cases} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$.

ومنه : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x) = -\infty$ ، إذن : المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{\pi}{2}$ مقارب عمودي للمنحني (C) .

3) أ) لدينا : $g(x)=\tan x-\sqrt{1+\tan^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}-\sqrt{1+(\frac{\sin x}{\cos x})^2}=\frac{\sin x}{\cos x}-\sqrt{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}$ ، أي ،

$g(x)=\frac{\sin x}{\cos x}-\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}$ ، و منه : $g(x)=\frac{\sin x-1}{\cos x}$.

(توضيح : بما أنّ $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ فإنّ : $\cos x>0$ ، أي : $\sqrt{\cos^2 x}=\cos x$).

ب) دراسة تغيرات الدالة g :

❖ حساب $g'(x)$:

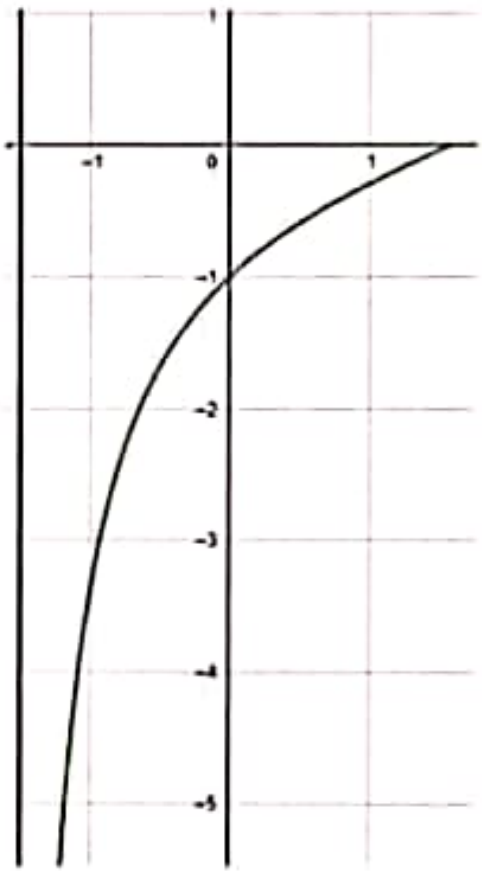
$g'(x)=\frac{\cos x\times\cos x-(-\sin x)(\sin x-1)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$.

نعلم أنّ : $1-\sin x>0$ من أجل كل $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ، إذن : الدالة g متزايدة تماما على $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

❖ جدول التغيرات :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0 ‖

❖ الإنشاء :



الجزء الثالث :

1) أولاً نلاحظ أنّ D_h متناظرة بالنسبة إلى 1 ، ثانياً نحسب : $h\ 2-x$ في الحالتين ، أي :

❖) حالة $2-x \leq 0$:

$$h(2-x) = 2-x-\sqrt{1+(2-x)^2} = 2-x-\sqrt{1+4+x^2-2x} = 2-x-\sqrt{x^2-2x+5} = h(x)$$

❖) حالة $2-x \geq 2$:

$$h(2-x) = 2-(2-x)-\sqrt{(2-x)^2-4(2-x)+5} = x-\sqrt{x^2+1} = h(x).$$

إذن : من اجل كل x من $]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$ يكون : $h(2-x) = h(x)$

و منه : المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_h) .

2) تشكيل جدول تغيرات الدالة h :

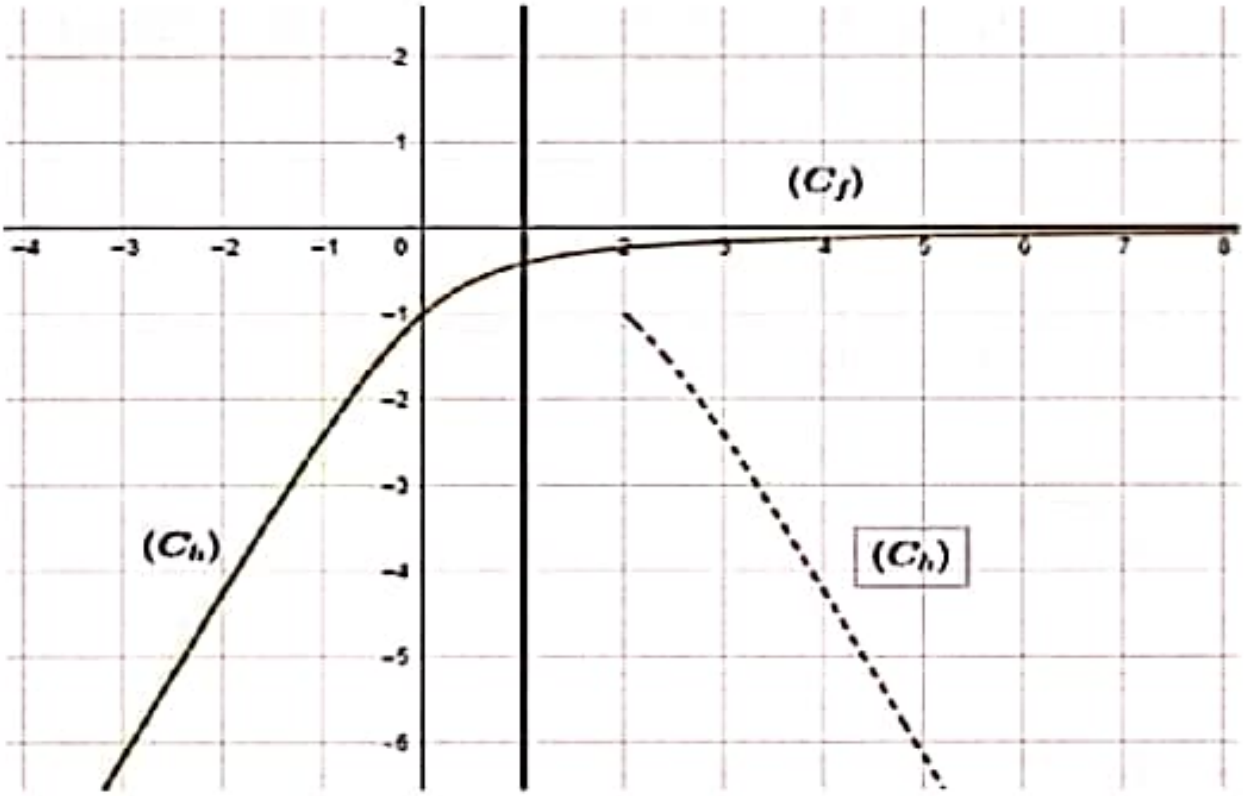
❖) لدينا على المجال $]-\infty;0]$: $h(x) = f(x)$.

❖) على المجال $[2;+\infty[$ نكمل جدول التغيرات بالحفاظ على قيم $f(x)$ و تغير إتجاه الدالة f ، لأنّ المنحني (C_h) يناظر المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $x = 1$.

❖) جدول التغيرات على المجال $[2;+\infty[$

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	-1 ↘	$-\infty$

3) إنشاء (C_h) :



كتابة الأستاذ : بن . ع

دراسة دالة عددية (مثلثية) رقم 06 + 07

المسألة رقم 01:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \sin 3x - 3\sin x$ ، و ليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) بيّن أنّ الدالة f دورية و دورها هو 2π .

2) ادرس شفعية الدالة f ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) .

3) أ) قارن بين $f(x)$ و $f(\pi - x)$. فسّر النتيجة هندسياً.

ب) إستنتج مما سبق مجالا لدراسة الدالة f .

4) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x تكون: $f'(x) = -6\sin x \times \sin 2x$.

5) ادرس تغيّرات الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

6) انشئ المنحني (C_f) على $[-2\pi;2\pi]$.

المسألة رقم 02:

f دالة معرّفة على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ بـ: $f(x) = x.\tan x$.

1) ادرس شفعية الدالة f .

2) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

3) بيّن أنّه من أجل كل x من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ تكون: $f'(x) = \frac{2x + \sin 2x}{2\cos^2 x}$.

4) أ) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ كما يلي: $g(x) = 2x + \sin 2x$.

❖) ادرس تغيّرات الدالة g على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

ب) إستنتج تغيّرات الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

5) شكّل جدول تغيّرات الدالة f على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

6) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند ذات الفاصلة $\frac{\pi}{4}$.

7) أ) انشئ (T) و المنحني (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ب) ماهو عدد حلول المعادلة (E) ، حيث: $(E): \tan x = \frac{1}{x}$.

حل المسألة 01

لدينا : $f(x)=\sin 3x-3\sin x$.

1) إثبات انّ f دورية ، و دورها 2π : اي نحسب $f(x+2\pi)$.

$f(x+2\pi)=\sin 3(x+2\pi)-3\sin(x+2\pi)=\sin(3x+6\pi)-3\sin(x+2\pi)$ ، اي :

$f(x+2\pi)=\sin 3x-3\sin x$ ، و منه : $f(x+2\pi)=f(x)$.

إذن : الدالة f دورية و دورها 2π ، لهذا يمكن دراستها على مجال طوله 2π ، و ليكن المجال $[-\pi;\pi]$.

2) أ) شفعية الدالة f :

$f(-x)=\sin(-3x)-3\sin(-x)=-\sin 3x+3\sin x=-(\sin 3x-3\sin x)=-f(x)$.

و منه : الدالة f فردية ، إذن : المنحني (C_f) يقبل المبدأ O كمركز تناظر .

◆) نستنتج انّه يمكن أن ندرس الدالة f على المجال $[0;\pi]$.

3) أ) مقارنة $f(x)$ وَ $f(\pi-x)$ ، ثم تفسير النتيجة هندسياً :

$f(\pi-x)=\sin 3(\pi-x)-3\sin(\pi-x)=\sin(3\pi-3x)-3\sin(\pi-x)=\sin(2\pi+\pi-3x)-3\sin(\pi-x)$

اي : $f(\pi-x)=\sin(\pi-3x)-3\sin(\pi-x)=\sin 3x-3\sin x$ ، و منه : $f(\pi-x)=f(x)$.

إذن : كتفسير هندسي نقول انّ المنحني (C_f) يقبل محور تناظر و هو المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$.

ب) نستنتج مما سبق انّه يمكننا دراسة الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4) حساب $f'(x)$: $f'(x)=3\times\cos 3x-3\times\cos x=3(\cos 3x-\cos x)$.

نعلم انّ : $\cos a-\cos b=-2\sin(\frac{a+b}{2})\times\sin(\frac{a-b}{2})$

اي : $f'(x)=3(\cos 3x-\cos x)=3(-2)\sin(\frac{3x+x}{2})\times\sin(\frac{3x-x}{2})$ ،

و منه : $f'(x)=-6\sin 2x\times\sin x$ ، و هو المطلوب .

5) دراسة تغيرات الدالة f :

لدينا على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ، اي : $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ ، يكون : $0\le 2x\le\pi$ ، و منه : $\sin x\ge 0$ وَ $\sin 2x\ge 0$.

إذن : من اجل كل $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$: $f'(x)\le 0$ ، و بالتالي الدالة f متناقصة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

◆) جدول التغيرات :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	0 ↘	-4

6) الإنشاء :