ملخص الدّوال العددية

(معارف لابد منها)

ملخص الدّوال العدديـــــــــة لطلاب البـــــــكالوريا

الشعبة: علوم تجريبية، تقني رياضـــــي

1) إشارة العبارة $ax+b$ $(a \neq 0)$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	مثل إشارة a

2) إشارة وتحليل ثلاثي الحدود $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$:

المـــــــميز $\Delta = b^2-4ac$	حلول المعادلة $P(x)=0$ في $\mathbb{R}$	إشارة $P(x)$	تحليل $P(x)$
$\Delta < 0$	$S=\emptyset$	x: $-\infty$ … $+\infty$ ؛ $P(x)$: مثل إشارة a	لا يُمكن تحليل $P(x)$
$\Delta = 0$	$S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	x: $-\infty$ … $-\frac{b}{2a}$ … $+\infty$ ؛ $P(x)$: مثل إشارة a | 0 | مثل إشارة a	$P(x)=a(x-x_0)^2$ $\left(x_0=-\frac{b}{2a}\right)$
$\Delta > 0$	$S=\{x_1;x_2\}$ حيث: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	x: $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ ؛ $P(x)$: مثل إشارة a | 0 | عكس إشارة a | 0 | مثل إشارة a (نفرض أنّ $x_1 < x_2$)	$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

إذا كان x_1 و x_2 حلي المعادلة: $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ فإنّ: $\boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$ و $\boxed{x_1 \times x_2=\frac{c}{a}}$.

تعيين عددين عُلم مجموعهما وجداؤهما:

مبرهنة:

يكون مجموع عددين هو S وجداؤهما هو P إذا وفقط إذا كانا حلين للمعادلة ذات المجهول x: $x^2-Sx+P=0$.

(قال الإمام الشافعي رحمه الله)

أخي لن تنال العلم إلا بستة *** سأنبيك عن تفصيلها ببيان

ذكاءٌ وحرصٌ واجتهادٌ وبلغة *** وصحبة أستاذ وطول زمانِ

3) بعض المتطابقات الشهيرة:

a و b عددين حقيقيين أو عبارتين جبريتين:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

في كـــــل ما يلي يُرمز D_f إلى مجموعة تعريف دّالة f، وأمّا (C_f) فيُرمز إلى منحنيها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ملاحظة: إذا كتبنا ∞ فنقصد $+\infty$ أو $-\infty$.

4) المستقيم في المستوى:

فإنّ / إذا كان لدينا:	معامل توجيه (ميل) (Δ) هو	وشعاع توجيهه هو	وشعاعه الناظمي هو
$(\Delta): ax + by + c = 0$	$-\frac{a}{b}$	$\vec{u}\binom{-b}{a}$	$\vec{n}\binom{a}{b}$
$(\Delta): y = \alpha x + \beta$	α	$\vec{u}\binom{1}{\alpha}$	$\vec{n}\binom{-\alpha}{1}$

5) توازي وتعامد مستقيمين في المستوى:

إذا كان / لدينا:	$\begin{cases}(\Delta): ax + by + c = 0\\(\Delta'): a'x + b'y + c' = 0\end{cases}$	$\begin{cases}(\Delta): y = \alpha x + \beta\\(\Delta'): y = \alpha' x + \beta'\end{cases}$
$(\Delta)//(\Delta')$ معناه	$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$	$\alpha = \alpha'$
$(\Delta) \perp (\Delta')$ معناه	$\frac{a \times a'}{b \times b'} = -1$	$\alpha \times \alpha' = -1$

6) مستقيمات شهيرة:

معادلة حامل محور الفواصل (xx'): $\boxed{y = 0}$	تكون معادلة مستقيم يُوازي حامل محور الفواصل من الشكل $\boxed{y = b}$
معادلة حامل محور تراتيب (yy'): $\boxed{x = 0}$	تكون معادلة مستقيم يُوازي حامل محور التراتيب من الشكل $\boxed{x = a}$
معادلة المنصف الأول: $\boxed{y = x}$	تكون معادلة مستقيم يُوازي المنصف الأول من الشكل: $\boxed{y = x + \beta}$
معادلة المنصف الثاني: $\boxed{y = -x}$	معادلة مستقيم يُوازي المنصف الثاني من الشكل: $\boxed{y = -x + \beta}$

7) المستقيمات المقاربة:

أ) المستقيم المقارب الأفقي	إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b}$	فإنّ تفسيرها البياني (أو الهندسي) هو: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = b}$ (المُوازي لمحور الفواصل) مقارب لـ(C_f) بجوار ∞.
ب) المستقيم المقارب العمودي	إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty}$	فإنّ تفسيرها البياني (أو الهندسي) هو: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x = a}$ (المُوازي لمحور التراتيب) مقارب لـ(C_f).
ج) المستقيم المقارب المائل	① **لإثبات** أنّ المستقيم $(\Delta): y = ax + b$ مقارب مائل لـ(C_f) بجوار ∞، **يكفي أنْ نُثبت أنّ:** $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (ax + b) = 0]}$.	
	② إذا لم تُعطى لنا معادلة المستقيم المُقارب المائل، وطُلب منّا تعيينه، ننظر إلى عبارة $f(x)$، فإنْ كانت من الشكل التالي: $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ مع $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)$ فالمستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل لـ بجوار ∞.	
	③ إذا لم تتوفر الملاحظة السابقة، نُعيّن المستقيم المُقارب المائل بالطريقة التالية: **نحسب** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$، فنجد عددا حقيقيا a غير معدوم، **ثم نحسب** $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - ax]$، فنجد عددا حقيقيا b وتكون معادلة المستقيم المقارب المائل هي: $y = ax + b$.	

8) الدّالة الزوجية والدّالة الفردية:

f دّالة معرفة على D_f (حيث D_f **متناظرة بالنسبة إلى الصفر**)

D_f متناظرة بالنسبة إلى الصفر معناه من أجل كل $x \in D_f$، فإنّ $-x \in$

لإثبات أنّ f زوجية	نبرهن، من أجل كل x من D_f أنّ: $\boxed{f(-x) = f(x)}$.	ويكون منحناها **متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب**، فيُمكن إنشاء الجزء من (C_f) على الجزء الموجب (أو السالب) من D_f، ثم نُكمل (C_f) بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.
لإثبات أنّ f فردية	نبرهن، من أجل كل x من D_f أنّ: $\boxed{f(-x) = -f(x)}$، أو $\boxed{f(-x) + f(x) = 0}$.	ويكون منحناها **متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم**، فيُمكن إنشاء الجزء من (C_f) على الجزء الموجب (أو السالب) من D_f، ثم نُكمل (C_f) بالتناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

9) مركز التناظر ومحور التناظر:

α عدد حقيقي، و f دّالة معرفة على D_f (حيث D_f **متناظرة بالنسبة لـ** α)

لإثبات أنّ $\boxed{\omega(\alpha;\beta)}$ **مركز تناظر لـ**(C_f).	**يكفي أن نُثبت**، من أجل كل x من D_f أنّ: $\boxed{f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta}$ أو $\boxed{f(\alpha - x) + f(\alpha - x) = 2\beta}$
لإثبات أنّ المستقيم ذو المعادلة: $\boxed{x = \alpha}$ **محور تناظر لـ**(C_f).	**يكفي أن نُثبت**، من أجل كل x من D_f أنّ: $\boxed{f(2\alpha - x) = f(x)}$ أو $\boxed{f(\alpha - x) = f(\alpha - x)}$

10) تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل وتقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب:

لتعيين **نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب**، نُعوض x **بالصفر** في عبارة $f(x)$ في حالة $0 \in D_f$.	**ملاحظة:** إذا كان $0 \in D_f$، فإنّ التقاطع نقطة ونكتب: $\boxed{(C_f) \cap (yy') = \{A(0; f(0))\}}$.
لتعيين **نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل**، **نحل المعادلة $f(x) = 0$** حيث $x \in D_f$ (طبعاً، إذا كانت قابلة للحل)	**ملاحظة:** بعد حل المعادلة، يكون عدد نقط التقاطع حسب عدد الحلول التي تنتمي إلى D_f. ونكتب: $\boxed{(C_f) \cap (xx') = \{A(x_1; 0); B(x_2; 0); \dots\}}$.

11) قابلية اشتقاق دّالة عند عدد حقيقي x_0: (العدد المشتق)

تكون f **قابلة للاشتقاق** عند x_0 إذا وفقط إذا كانت $\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h} = l}$ أو $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0} = l}$،

حيث $\boxed{f'(x_0) = l \in \mathbb{R}}$ يسمى **العدد المشتق للدّالة f عند x_0**. وتفسيرها **البياني (أو الهندسي)** هو:

المنحنى (C_f) يقبل **مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0 **معامل توجيهه** $\boxed{f'(x_0)}$، ومعادلته من الشكل:

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

مخطط توضيحي (خريطة ذهنية)

f قابلة للاشتقاق عند x_0

معناه

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h} = l}$$

أو

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0} = l}$$

l يسمى العدد المشتق للدّالة f عند x_0، ونرمز له بالرمز $f'(x_0)$.

نكتب:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)}$$

التفسير الهندسي للعد المشتق:

يُمثل بيانيا (أو هندسيا) معامل توجيه مماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(x_0; y_0)$، حيث $y_0 = f(x_0)$.

بصيغة أخرى: يُمثل بيانيا (أو هندسيا) معامل توجيه مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0.

القراءة البيانية للعد المشتق:

يُمكن إيجاده بيانيا بأخذ نقطتين A وB من هذا المماس معلومتين الإحداثيات فنجد: $\boxed{f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}}$.

إذا كان المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 **مُوازيا لمحور الفواصل فإنّ معامل توجيهه معدوم** أي $f'(x_0) = 0$ وتكون معادلته من الشكل $y = f(x_0)$.

12) نقطة زاوية:

إذا كان: $\boxed{\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_1}$ وَ $\boxed{\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_2}$، حيث l_1 و l_2 **عددان حقيقيان.**

فإنّ f **قابلة للاشتقاق عند** x_0 **من اليسار** وعددها المشتق هو $f'_g(x_0) = l_1$.

و f **قابلة للاشتقاق عند** x_0 **من اليمين** وعددها المشتق هو $f'_d(x_0) = l_2$.

في حالة $(l_1 \neq l_2)$، نقول أنّ f **غير قابلة للاشتقاق عند** x_0.

ويكون **التفسير الهندسي** هو أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0: **نقطة زاوية** للمنحنى (C_f).

ملاحظة 01: قد تُكتب النهايتان السابقتان على الشكل التالي:

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1} \text{ وَ } \boxed{\lim_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2}$$

ملاحظة 02: المنحنى (C_f) يقبل **نصفي مماسين** عند **نقطة الزاوية** معادلاتهما:

$$\boxed{\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}} \text{ وَ } \boxed{\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}}.$$

تنبيه: تبقى **النقطة الزاوية موجودة** حتى لو كانت **إحدى النهايتين السابقتين عدداً حقيقياً** والأخرى ∞.

---

13) نقطة الانعطاف:

بصفة عامة، لتعيين نقطة الانعطاف، نقوم بما يلي: نحسب المشتق الثاني $f''(x)$، وندرس إشارته، فإذا وجدنا $f''(x)$ **انعدم** عند قيمة x_0 من D_f، **مُغيّراً إشارته،** تكون النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة انعطاف لـ (C_f). (**ملاحظة:** احداثييها هي $(x_0; f(x_0))$)

حالة خاصة: في بعض الحالات، يُمكن **تعيين نقطة الانعطاف** دون اللجوء إلى المشتق الثاني $f''(x)$، وذلك إذا **انعدم المشتق الأوّل** $f'(x)$ عند قيمة x_0 من D_f، **ولم يُغيّر إشارته،** فتكون النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة انعطاف لـ (C_f). (**نفس الملاحظة:** احداثييها هي $(x_0; f(x_0))$)

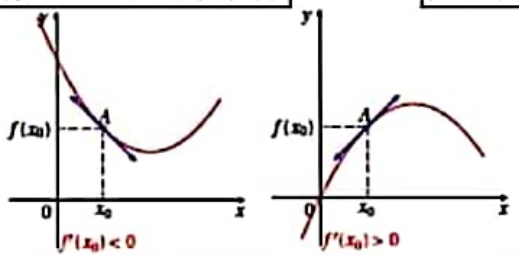
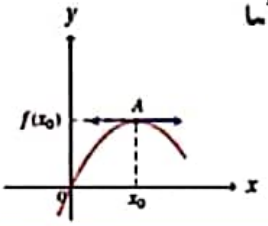
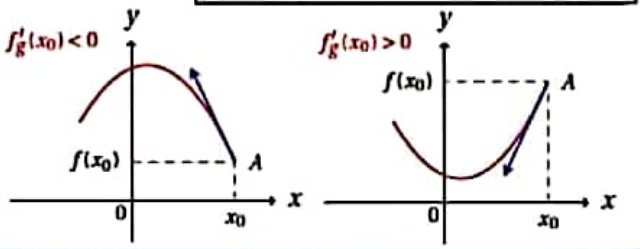
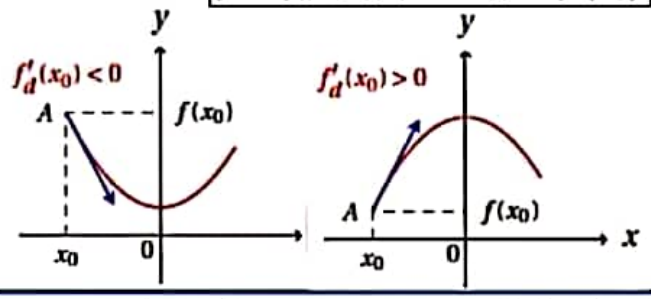
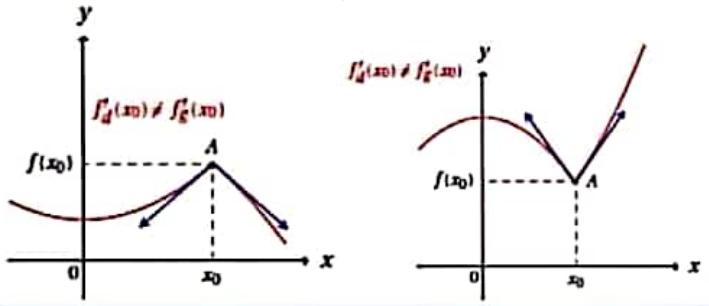
ملاحظة مهمة:

في بعض الحالات، يُفرض علينا سياق التمرين أن نعيّن نقطة الانعطاف بالكيفية التالية: يُطلب منّا أن **ندرس وضعية** المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **فإذا وجدنا أنّ** (C_f) **غيّر وضعيته بالنسبة إلى المماس (قبل وبعد نقطة التّماس)** نستنتج أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0 هي نقطة انعطاف لـ(C_f).

حكمة أعجبتني:

المواهب تحددها التدريبات والممارسة، وليس القدرات الذاتية
وعليه ننصح الطالب بالممارسة المنزلية

14) بعض التفسيرات الهندسية للاشتقاقية:

النهاية	الاستنتاج	التفسير البياني (أو الهندسي)
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$ **أو** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$	الدالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، وعددها المشتق هو $\boxed{f'(x_0)=l}$.	المنحنى (C_f) **يقبل مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معامل توجيهه (ميله)** $\boxed{f'(x_0)=l}$، ومعادلته: $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$. 
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$ **أو** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$	الدالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، وعددها المشتق هو $\boxed{f'(x_0)=0}$.	المنحنى (C_f) **يقبل مماس (مُوازي لمحور الفواصل)** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معامل توجيهه (ميله)** $\boxed{f'(x_0)=0}$ ومعادلته: $\boxed{y=f(x_0)}$. 
$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_1$ **أو** $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_1$	الدالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، على اليسار وعددها المشتق هو $\boxed{f_g'(x_0)=l_1}$.	المنحنى (C_f) **يقبل نصف مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معادلته:** $\boxed{y=f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$. 
$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_2$ **أو** $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_2$	الدالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0، على اليمين وعددها المشتق هو $\boxed{f_d'(x_0)=l_2}$.	المنحنى (C_f) **يقبل نصف مماس** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، **معادلته:** $\boxed{y=f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$. 
$l_1\neq l_2$	الدالة f **غير قابلة للاشتقاق** عند x_0.	المنحنى (C_f) **يقبل نصفي مماسين** عند النقطة ذات الفاصلة x_0، تسمى هذه النقطة: **نقطة زاوية للمنحنى** (C_f). 

15) المماس:

هناك ستُّ (06) صيغ -تقريباً- لطرح سؤال المماس، لكن تبقى **معرفة فاصلة نقطة التّماس x_0 هي المفتاح للإجابة** على أي منها كما سنرى:

الصيغة	الطـــــرح	كيفية الإجابة
الصيغة الأولى (العادية)	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0.	نكتب الدستور: $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ حيث نعوض x_0 بقيمتها المُعطاة.
الصيغة الثانية	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيب y_0.	نحلّ المعادلة $\boxed{f(x_0) = y_0}$، وعند تعيين قيمة x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).
الصيغة الثالثة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **ميله (أو معامل توجيهه)** يساوي α.	نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0) = \alpha}$، وعند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية). **ملاحظة:** عدد الحلول يدلّ على عدد المماسات.
الصيغة الرابعة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يُوازي** المستقيم ذا المعادلة $y = \alpha x + \beta$.	نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0) = \alpha}$، عُدنا إلى الحالة الثانية. **ملاحظة:** مستقيمان متوازيان لهما نفس معامل التوجيه.
الصيغة الخامسة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يُعامد** المستقيم ذا المعادلة $y = \alpha x + \beta$.	نحلّ المعادلة $\boxed{\alpha \times f'(x_0) = -1}$. **ملاحظة:** مستقيمان متعامدان، جداء معاملي توجيههما يساوي (-1).
الصيغة السادسة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) **يشمل** النقطة ذات الإحداثيي $(x_M; y_M)$.	نحلّ المعادلة $\boxed{y_M = f'(x_0)(x_M - x_0) + f(x_0)}$، وعند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).

16) الوضع النسبي:

لدراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y = ax + b$، ندرس إشارة الفرق $f(x) - (ax + b)$ حيث نكون أمام ثلاثة احتمالات وهي كالتالي:

$f(x) - (ax + b) > 0$ (الفرق **موجب تماما**)	(C_f) يقع فوق (Δ).
$f(x) - (ax + b) < 0$ (الفرق **سالب تماما**)	(C_f) يقع تحت (Δ).
$f(x) - (ax + b) = 0$ (الفرق **معدوم**)	(C_f) يقطع (Δ).

ملاحظات:

- المستقيم (Δ)، قد يكون **مستقيم مقارب أو مماس (نقطة الانعطاف)**.
- يمكن تعميم الدراسة على منحنيين كيفيين (C_f) و(C_g)، وذلك **بدراسة إشارة الفرق** $f(x) - g(x)$ واتباع نفس الخطوات.

17) استنتاج تمثيل بياني من آخر:

بعد إنشاء (C_f)، قد يُطلب منّا أنْ نستنتج منحنياً آخر (C_h) -مثلا- لدّالة h؛ ويكون الاستنتاج حسب صيغة السؤال كما سيأتي:

الصيغة	الطـــــرح	كيفية الإجابة
الصيغة الأولى	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h حيث: $\boxed{h(x) = \lvert f(x)\rvert}$.	• **على المجالات** التي تكون فيها $\boxed{f(x) \geq 0}$ (أي يكون فيها (C_f) على محور الفواصل أو فوقه) نحصل على $h(x) \equiv f(x)$؛ ومنه (C_h) **ينطبق على** (C_f). • **على المجالات** التي تكون فيها $\boxed{f(x) \leq 0}$ (أي يكون فيها (C_f) على محور الفواصل أو تحته) نحصل على $h(x) = -f(x)$؛ ومنه يكون (C_h) **نظير** (C_f) **بالنسبة إلى محور الفواصل.**
الصيغة الثانية	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h حيث: $\boxed{h(x) = f(\lvert x\rvert)}$. **ملاحظة:** عادةً ما يُطلب منّا أوّلا أن نُثبت أنّ h **زوجية.**	• إذا كان $x \geq 0$ و $x \in D_f$ أي $\boxed{x \in D_f \cap [0; +\infty[}$ (x ينتمي إلى الجزء الموجب من D_f) نحصل على $h(x) = f(x)$؛ ومنه (C_h) **ينطبق على** (C_f). • نُكمل الجزء المتبقي من (C_h) **بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب** لأنّ h **زوجية.**
الصيغة الثالثة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h حيث: $\boxed{h(x) = f(-\lvert x\rvert)}$. **ملاحظة:** عادةً ما يُطلب منّا أوّلا أن نُثبت أنّ h **زوجية.**	• إذا كان $x \leq 0$ و $x \in D_f$ أي $\boxed{x \in D_f \cap]-\infty; 0]}$ (x ينتمي إلى الجزء السالب من D_f) نحصل على $h(x) = f(x)$؛ ومنه (C_h) **ينطبق على** (C_f). • نُكمل الجزء المتبقي من (C_h) **بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب** لأنّ h **زوجية.**
الصيغة الرابعة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h حيث: $\boxed{h(x) = -f(x)}$.	• (C_h) **هو نظير** (C_f) **بالنسبة إلى محور الفواصل.**
الصيغة الخامسة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h حيث: $\boxed{h(x) = f(-x)}$.	• (C_h) **هو نظير** (C_f) **بالنسبة إلى محور التراتيب.**
الصيغة السادسة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h حيث: $h(x) = -f(-x)$.	• (C_h) **هو نظير** (C_f) **بالنسبة إلى مبدأ المعلم.**
الصيغة السابعة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h التي تحقق: $\boxed{h(x) = f(x+b) + k}$.	• نستنتج (C_h) **من** (C_f) **بالانسحاب ذي الشعاع** $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\k\end{pmatrix}$. (أي (C_h) **صورة** (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\k\end{pmatrix}$)
الصيغة الثامنة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h التي تحقق: $\boxed{h(x) = f(x) + k}$.	• هذه الصيغة هي الصيغة السابعة في حالة $\boxed{b = 0}$. • (C_h) **صورة** (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$.

الصيغة التاسعة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h التي تحقق: $\boxed{h(x) = f(x+b)}$.	• هذه الصيغة هي الصيغة السابقة في حالة $\boxed{k=0}$. • (C_h) صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-b\vec{i}$.
الصيغة العاشرة	استنتج (C_h) منحنى الدّالة h التي تحقق: $\boxed{h(x) = kf(x)}$؛ $k \in \mathbb{R}^*$.	• نحصل على نقطة من (C_h) **ذات الفاصلة x بضرب ترتيب النقطة M في العدد k؛ حيث M نقطة من (C_f) فاصلتها x.**

18) الاستمرارية:

f دّالة **معرّفة** على مجال I من $\mathbb{R}$، إذا كـــانت f **مستمرة على I** فإنّ **تفسيرها البياني (أو الهندسي)** هو: أنّه **يُمكن رسم منحناها البياني على I دون رفع القلم (اليد).**

نتائـــــج:

- الدّوال المرجعية **مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- الدّوال كثيرات الحدود؛ "cos" و"sin" هي دّوال **مستمرة على** $\mathbb{R}$.
- الدّوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) هي دّوال **مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- مجموع؛ جداء وتركيب دّوال **مستمرة هي دّوال مستمرة.**

19) مبرهنة القيم المتوسطة:

مبرهنة القيم المتوسطة (تُقبل دون برهان)	**التفسير البياني (أو الهندسي) "المبرهنة القيم المتوسطة"**
الحالة العامة $(k \in \mathbb{R})$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$، من أجل كل عدد حقيقي k **محصور** بين $f(a)$ و$f(b)$، فـإنّ: المعادلة $f(x) = k$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=k}$ **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$.
الحالة الخاصة $(k=0)$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$، وكان 0 **محصور** بين $f(a)$ و$f(b)$، أي: $f(a) \times f(b) < 0$ فـإنّ: المعادلة $f(x) = 0$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** حامل محور الفواصل **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$.
وحدانية الحل	
الحالة العامة $(k \in \mathbb{R})$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة ورتيبة تماما** على المجال $[a;b]$، من أجل كل عدد حقيقي k **محصور** بين $f(a)$ و$f(b)$، فـإنّ: المعادلة $f(x) = k$ **تقبل حلا وحيدا α** في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=k}$ **في نقطة واحدة فاصلتها α** في المجال $[a;b]$.
الحالة الخاصة $(k=0)$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة ورتيبة تماما** على المجال $[a;b]$، وكان 0 **محصور** بين $f(a)$ و$f(b)$، أي: $f(a) \times f(b) < 0$ فـإنّ: المعادلة $f(x) = 0$ **تقبل حلا وحيدا α** في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** حامل محور الفواصل **في نقطة واحدة فاصلتها α** في المجال $[a;b]$.

طُرق اثبات "وُجود" حلول معادلة في مجال $[a;b]$ باستعمال "مبرهنة القيم المتوسطة"

نتبع الخطوات التالية:

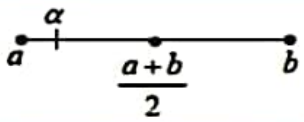
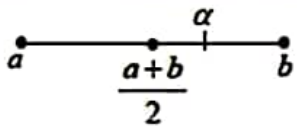
الحالة العامة $(k \in \mathbb{R})$	الحالة الخاصة $(k = 0)$
1/نكتب المعادلة من الشكل $f(x) = k$ **(إن لم تُعطى لنا)** **2/نتحقّق من استمرارية** الدّالة f على المجال $[a;b]$. **3/نتحقّق** من أنّ k **محصور** بين $f(a)$ و$f(b)$، **وذلك بعد حسابهما.**	**1/**نكتب المعادلة من الشكل $f(x) = 0$ **(إن لم تُعطى لنا)** **2/نتحقّق من استمرارية** الدّالة f على المجال $[a;b]$. **3/نتحقّق** من أنّ $\boxed{f(a) \times f(b) < 0}$، **وذلك بعد حسابهما.**

ملاحظة: تقبل المبرهنات السابقة عدة **تمديدات** في حالة الدّالة f **مستمرة ورتيبة تماماً** على مجال **مفتوح** أو **مفتوح من إحدى الجهتين، محدود** أو **غير محدود**. (في حالة المجال مفتوح نستعمل النهايات)

20) إيجاد حصر لحل معادلة بالتنصيف:

المبدأ: بصفة عامة إذا كانت f دّالة **مستمرة ورتيبة تماماً** على مجال $[a;b]$ بحيث: $f(a) \times f(b) < 0$

فإنّ: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[a;b]$.

نعلم أنّ	إذا كان	فإنّ	توضيح
مركز المجال $[a;b]$ هو: $\boxed{m = \frac{a+b}{2}}$.	$f(a) \times f(m) < 0$	$\alpha \in [a;m]$ أي: $\boxed{a < \alpha < m}$، سعة هذا الحصر $m - a$	
	$f(a) \times f(m) > 0$	$\alpha \in [m;b]$ أي: $\boxed{m < \alpha < b}$، سعة هذا الحصر $b - m$	
نُواصل بنفس الطريقة من خلال تعويض a أو b بـm وذلك إلى غاية الحصول على الحصر المرغوب فيه.			

يُمكن استعمال جدول لتنظيم العملية

المرحلة	a	b	$m = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$	سعة الحصر
0							$b - a$

21) المشتقات والعمليات:

أ. مشتقات دوال مألوفة:

$f(x) =$	$f'(x) =$	مجالات قابلية الاشتقاق
$(k \in \mathbb{R})\ k$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$(n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N})\ x^n$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]0;+\infty[$ وَ $]-\infty;0[$
$(n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]0;+\infty[$ وَ $]-\infty;0[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$cosx$	$-sinx$	$\mathbb{R}$
$sinx$	$cosx$	$\mathbb{R}$

ب. المشتقات والعمليات على الدوال:

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$ (الدالة v لا تنعدم على I)
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+v'u$	$\frac{-v'}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

نتائج:

- الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها.

ج. الاشتقاقية والاستمرارية:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I، فإنّـــها مستمرة على هذا المجال وعكس هذه الخاصية ليس صحيح.

22) اشتقاق دالة مركبة:

أ. مشتقة الدالة $v \circ u$: $\boxed{(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]}$

ب. تطبيقات:

مشتقة الدالة $x \mapsto u(ax+b)$ ($a \neq 0$)

$f(x) = u(ax+b)$	$f'(x) = au'(ax+b)$

مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

مشتقة الدالة $x \mapsto [u(x)]^n$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 2$)

$f(x) = [u(x)]^n$	$f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$

مشتقة الدالة $x \mapsto \frac{1}{[u(x)]^n}$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 1$)

$f(x) = \frac{1}{[u(x)]^n}$	$f'(x) = \frac{-nu'(x)}{[u(x)]^{n+1}}$

---

23) التقريب التآلفي -طريقة أولر:

أ. التقريب التآلفي:

خاصية: f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0.

يسمى $f(x_0) + hf'(x_0)$ **التقريب التآلفي** لـ$f(x_0+h)$ من أجل h قريب من 0، المُرفق بالدالة f.

نكتب: $\boxed{f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)}$.

ب. طريقة أولر:

الهدف: إنشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة f.

إعتمد **"أولر"** في إنشاء منحنى دالة نعلم مشتقتها f' ونقطة $A_0(x_0; y_0)$ من تمثيلها البياني وذلك بإنشاء نقطة أخرى $A_1(x_1; y_1)$ بالإعتماد على النقطة A_0 حيث: $A_1(x_0+h; f(x_0+h))$

أي: $\boxed{A_1(x_0+h; f(x_0) + hf'(x_0))}$.

-بنفس الطريقة إنشاء نقطة ثالثة $A_2(x_2;y_2)$ بالإعتماد على النقطة A_1 حيث: $A_2(x_1+h;f(x_1+h))$
أي: $\boxed{A_2(x_1+h;f(x_1)+hf'(x_1))}$.

...

-وهكذا نتحصل على مجموعة من النقط $A_n(x_n;y_n)$ حيث: $A_n(x_{n-1}+h;f(x_{n-1}+h))$
أي: $\boxed{A_n(x_{n-1}+h;f(x_{n-1})+hf'(x_{n-1}))}$.

بالتوصيل بين هذه النقط نتحصل على تمثيل بياني **قريب جداً** من التمثيل البياني (C_f) بشرط أن يكون h قريب من 0، (h يسمى **الخطوة**)

24) المناقشة البيانية:

المعادلة من الشكل $f(x)=m$، m وسيط حقيقي.

المعادلة من الشكل $f(x)=ax+\boxed{m}$، m وسيط حقيقي.

المناقشة مائلة مُوازية للمستقيم ذو المعادلة $y=ax+\boxed{b}$.

المعادلة من الشكل $f(x)=mx+b$، m وسيط حقيقي.

المناقشة دورانية حول النقطة $A(0;b)$.

المعادلة من الشكل $f(x)=f(m)$، m وسيط حقيقي.

المناقشة أفقية مُوازية لمحور الفواصل.

الأسئلة الشائعة حول الدّوال العددية في البكالوريا وكيفية الإجابة عليها

الشعبة: علوم تجريبية، تقني رياضي

بكالوريا	السؤال	الإجابة
2018 تر		