

مجلة العبقري في الرياضيات (المتتاليات العددية) العاشر // الشعبة: علوم تجريبية: تقني رياضي.

ملخص: حول المتتاليات العددية// التحضير الجيد بكالوريا// الشعبة: علوم تج؛ تر.

١ تعريف متتالية عددية كـ

نسمى متتالية عددية (u_n) ، كل ذاته معرفة على \mathbb{N} او على جزء من \mathbb{N} وتأخذ قيمها في \mathbb{R} .

التعريف

٢ اتجاه تغير متتالية عددية كـ

لدراسة اتجاه تغير متتالية عددية (u_n) . ندرس اشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ حيث تكون أمام ثلاثة احتمالات:

الطريقة العامة

متسلسلة	إذا كان
(u_n) متزايدة تماماً	$u_{n+1} - u_n > 0 \quad \textcircled{1}$
(u_n) متناقصة تماماً	$u_{n+1} - u_n < 0 \quad \textcircled{2}$
(u_n) ثابتة	$u_{n+1} - u_n = 0 \quad \textcircled{3}$

اذا كانت المتتالية (u_n) موجبة تماماً (كل حدودها موجبة تماماً اي: $u_n > 0$)

حالات خاصة

تقارن العاصل $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1، حيث تكون أمام ثلاثة احتمالات:

متسلسلة	إذا كان
(u_n) متزايدة تماماً	$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \quad \textcircled{1}$
(u_n) متناقصة تماماً	$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \textcircled{2}$
(u_n) ثابتة	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \quad \textcircled{3}$

٣ المتتالية الثابتة كـ

ملاحظة	(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N}	(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N}	إذا كانت $\textcircled{2}$ العريف
كل الحدود متساوية، وتتشعّب الحد الأول.	من أجل كل n من \mathbb{N} : $u_{n+1} = u_n = u_1$	من أجل كل n من \mathbb{N} : $u_{n+1} = u_n = u_0$	المتتالية (u_n) ثابتة معناه:

٤ المتتاليات المحدودة كـ

- (١) محدودة من الأعلى بعد حقيقى A، معناه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n < A$ (أو $u_n \leq A$)
- (٢) محدودة من الأسفل بعد حقيقى B، معناه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > B$ (أو $u_n \geq B$)
- (٣) محدودة، معناه محدودة من الأعلى ومن الأسفل، أي: $B \leq u_n \leq A$ (أو $B < u_n < A$)

التعريف

٥ نهاية متتالية

الطريقة ١

١) إذا كانت (u_n) معرفة بعدها العام u_n المنطوى بدلة n , فحسب $\lim u_n = l$ ياستعمل قواعد نهایات التوال المعروفة.

٢) إذا كانت (u_n) معرفة بعدها الأول وعلاقة تراجعية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$, فحسب نهایتها بدل الممثلة $f(l) = l$ والتي تأخذ الشكل $\lim u_{n+1} = \lim u_n$.

٦ تقارب أو تباعد متتالية

التقارب والتباعد

١) إذا كانت $\lim u_n = l$, حيث $(l \in \mathbb{R})$ فـ (u_n) متقاربة.

٢) إذا كانت $\lim u_n = \pm\infty$, أو $\lim u_n = \pm 0$ (غير موجودة) فـ (u_n) متبااعدة.

نتائج: (نظريه أخرى لمعرفة تقارب متتالية)

١) إذا كانت (u_n) , متزايدة تماماً ومحدود من الأعلى $(u_n \leq A)$ $u_n < A$ فهي متقاربة.

٢) إذا كانت (u_n) , متناقصة تماماً ومحدودة من الأسفل $(u_n \geq B)$ $u_n > B$ فهي متقاربة.

٧ المتاليات المجاورتان

١) احذاها متزايدة، والأخرى متناقصة.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0 \quad ②$$

(u_n) (v_n) متاليتان مجاورتان معنام

متاليتان مجاوريتان متقاربتان؛ و

ملاحظة:

٨ المتالية الحسابية والمتالية الهندسية

المتالية الحسابية:

١) طريقة إثبات أن المللالية (u_n) حسابية:

يكتفى أن ثبت أن: ① الترق $u_{n+1} - u_n = r$ عدد ثابت أى:

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{لـ } u_n \text{ بدلة } n \quad ②$$

حيث: r عدد حقيقي، يسمى أساس المتالية الحسابية (u_n) .

٢) عبارة الحد العام لملالية حسابية: (u_n) بدلة n ; u_n يسمى الحد العام.

١) بصفة عامة $u_n = u_p + (n - p)r$, علاقة تربط بين حددين مختلفين.

$$u_n = u_0 + nr \quad 2)$$

$$u_n = u_1 + (n - 1)r \quad 3)$$

ملاحظة: ١) هذه العلاقات يمكن استعمالها في حالات أخرى، وذلك بتعمييم u_n بـ أي حد معطى في التمرير.

٢) شتعمل العلاقة ١، إذا كانت (u_n) حسابية ومعرفة بحددين مختلفين ويستعمل العلاقة تقوم بحسب

$$r = \frac{u_n - u_p}{n - p}$$

٣) مجموع حموه ملائمة من ملائمة حسابية:

$$\text{بصيطة عامة: } \left(\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2} \right) (\text{عدد الحدود}) = \text{المجموع}.$$

حيث: $1 + \text{دليل الحد الأول} - \text{دليل الحد الأخير} = \text{عدد الحدود}$.

٤) خاصية الوسط الحسابي:

تكون الأعداد الحقيقة a , b و c بهذا الترتيب حدوداً متتابعة من مسلاة حسابية إذا وفقط إذا كان

$$b = \frac{a+c}{2}$$

← المسلاة الهندسية:

١) طريقة إثبات أن المسلاة (u_n) هندسية:

$$\text{يكفى أن ثبت أن: } ① \text{ الحاصل } \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ عدد ثابت أي: } \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

$$② \text{ أو نكتب } u_{n+1} = q u_n \text{ بدلاً من } u_n \text{ نثبت: }$$

حيث: q عدد حقيقي، يسمى أساس المسلاة الهندسية (u_n) .

٢) صيارة الحد العام لمسلاة حسابية: (u_n) بدلالة n ، u_1 يسمى الحد العام.

$$① \text{ بصفة عامة } u_n = u_p \times q^{n-p}, \text{ علاقة تربط بين حددين مختلفين.}$$

$$② \text{ في حالة } u_0 = u_0 \times q^n, \text{ في حالة } u_0 \text{ هو الحد الأول.}$$

$$③ \text{ في حالة } u_1 = u_1 \times q^{n-1}, \text{ في حالة } u_1 \text{ هو الحد الأول.}$$

ملاحظة: ① هذه العلاقات يمكن استعمالها في حالات أخرى، وذلك بتعریض u_n بأي حد معطى في التمارين.

② شتتمل العلاقة ①، إذا كانت (u_n) هندسية ومعرفة بحدين مختلفين ويستعمل العلاقة تقوم بحسب الأساس تحد:

$$q^{n-p} = \frac{u_n}{u_p}$$

٣) مجموع حموه ملائمة من ملائمة هندسية:

$$\text{بصيطة عامة: } \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) (\text{الحد الأول}) = \text{المجموع}.$$

حيث: $1 + \text{دليل الحد الأول} - \text{دليل الحد الأخير} = \text{عدد الحدود}$.

٤) خاصية الوسط الهندسي:

تكون الأعداد الحقيقة a , b و c بهذا الترتيب حدوداً متتابعة من مسلاة هندسية إذا وفقط إذا كان

٥) قوانين النهايات المعلقة بالمسلاة الهندسية:

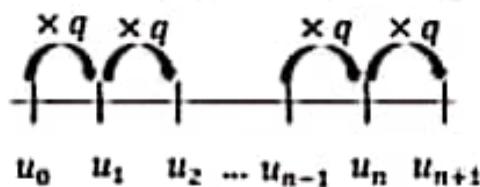
$$① \text{ إذا كانت: } 1 > q, \text{ فلت: } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

$$② \text{ إذا كانت: } 1 < q < -1, \text{ فلت: } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

$$③ \text{ إذا كانت: } -1 \leq q, \text{ فلت: } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n \text{ غير موجودة.}$$

المتالية (u_n)

هندسية



حيث q عدد حقيقي
 $u_{n+1} = qu_n$
 q يسمى أصل الممتاليه الهندسية (u_n)

الطريقة 01:

تبين أن العامل $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت (الأصل)

الطريقة 02:

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n نجد:

$$u_{n+1} = qu_n$$

إذا أعطى :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

إذا أعطى :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

من أجل عددين طبيعيين p و n

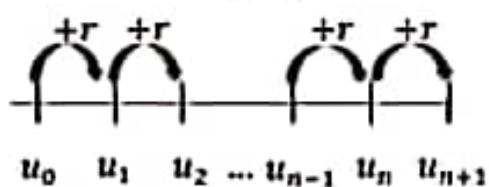
$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

علاقة تربط بين حدين مختلفين في متاليه هندسية

بصيغة عامة:

$$\text{الحد الأول} = \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) \text{ عدد الحدود}$$

حسابية



حيث r عدد حقيقي
 $u_{n+1} = u_n + r$
 r يسمى أصل الممتاليه الحسابية (u_n)

الطريقة 01:

تبين أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت (الأصل)

الطريقة 02:

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n نجد:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

إذا أعطى :

$$u_n = u_0 + nr$$

إذا أعطى :

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

من أجل عددين طبيعيين p و n

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

علاقة تربط بين حدين مختلفين في متاليه حسابية

مجموع حدود متتابعة من متالية

بصيغة عامة:

$$\left(\frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2} \right) \times \text{عدد الحدود} = \text{المجموع}$$

$1 + \text{نليل الحد الأول} - \text{نليل الحد الأخير} = \text{عدد الحدود}$

الوسط الهندسي:

نكون a , b و c ثلاثة حدود متتابعة من متالية هندسية إذا و فقط إذا كان

$$a \times c = b^2$$



$$\begin{cases} a = \frac{b}{q} \\ c = qb \end{cases}$$

خاصية الوسط

الوسط الحسابي:

نكون a , b و c ثلاثة حدود متتابعة من متالية حسابية إذا و فقط إذا كان

$$a + c = 2b$$

