Summary-ملخص الدرس

I. الدالة الأصلية.

1. الدالة الأصلية لدالة على مجال:

تعريف: f دالة معرفة على مجال I.

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I مشتقتها F' هي f.

من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$

خواص:

* إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالا أصلية على I.
* إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي

الدوال $x \mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

2. الدوال الأصلية لـ $f+g$ و kf (k عدد حقيقي)

خواص:

* إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لدالتين f و g على مجال I فإن $F+G$ دالة

أصلية للدالة $f+g$ على المجال I.

* إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على I $(k \in \mathbb{R})$

3. الدوال الأصلية لدوال مألوفة:

c عددا حقيقي كيفي.

f دالة معرفة على I بـ $f(x)=$	الدوال الأصلية لـ f على I هي الدوال المعرفة بـ $F(x)=$	المجال I هو
a (a عدد حقيقي)	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x+c	$\mathbb{R}$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+c,(a\neq 0)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+c$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$-\cos x+c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x+c$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k\in\mathbb{Z})$

4.الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2+c$	
$(n\in\mathbb{N}^*)$ $u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$(n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N})\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)>0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$

II. الحساب التكاملي

1.الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحنى:

خاصية

f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان

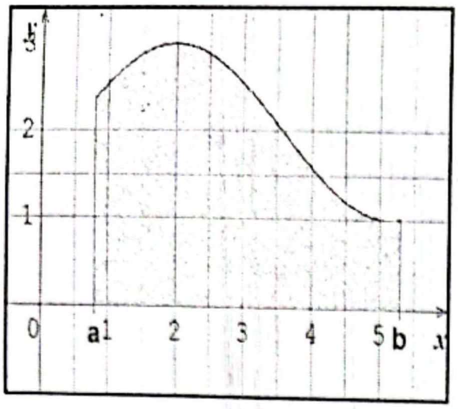
من I حيث $a\leq b$. (C_f) منحني f في معلم متعامد $(O;A,B)$ و F دالة أصلية لِـ f على I.

مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.

ملاحظات:

الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو

الحيز المحدد بالمنحني (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين



اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$.

☐تعريف:

f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I.

يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$، حيث F دالة أصلية لِ f على I،

التكامل من a إلى b لِ f و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$.

ملاحظات:

1. عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x)dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F للدالة f على مجال I يشمل العددين a و b ثم

نكتب: $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$

2. يمكن تبديل المتغير x بأحد الحروف t، q،.... فيكون لدينا مثلا $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

نتيجة:

f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \le b$. (C_f) منحني f في

معلم متعامد $(O;A,B)$ و F دالة أصلية لِ f على I.

مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$

2. خواص التكامل:

f و g دالتان معرفتان و مستمرتان على مجال I.

أ-الخطية

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I و من أجل كل عدد حقيقي k لدينا:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad (1)$$

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (2)$$

ب- الترتيب

خواص: a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$.

(1) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x) \geq 0$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

(2) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x) \leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

ج- علاقة شال

خواص: من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c من I لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

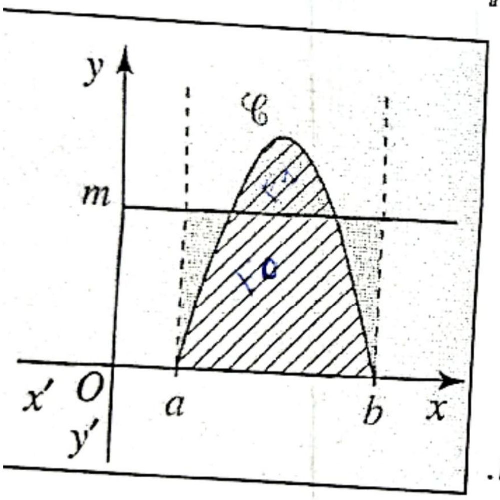
okay!

3. القيمة المتوسطة لدالة على مجال:

تعريف:

f دالة معرفة و مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a < b$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي: $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.



التفسير البياني:

نفرض أن الدالة f موجبة على المجال $[a;b]$.

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O; I, J)$.

$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يعني $m(b-a) = \int_a^b f(x)dx$

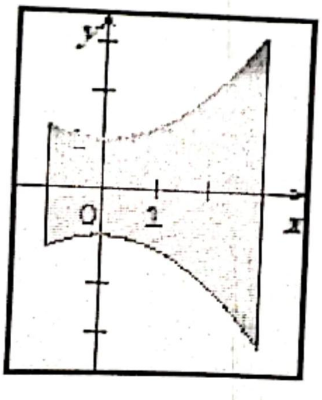
نعلم أن $\int_a^b f(x)dx$ هو مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b.

$m(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعداه $b-a$ و m (القيمة المتوسطة).

و هكذا فإن m ، القيمة المتوسطة لـ f على $[a;b]$، هي " ارتفاع " المستطيل

الذي قاعدته $b-a$ و الذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b.

نلاحظ أن للحيزين الملونين بالأزرق و الأحمر نفس المساحة.



حصر القيمة المتوسطة

خواص: f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$.

إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a;b]$. $m \leq f(x) \leq M$ فإن:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

<u>حالة خاصة:</u> إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكان a و b عددان حقيقيانْ من I ووجد عدد حقيقي M

بحيث من أجل كل x من I ، $|f(x)| \le M$ فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M|b-a|$

4.تكامل دالة سالبة على مجال

لتكن f دالة مستمرة و سالبة على مجال $[a;b]$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نرمز بـ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) وبالمستقيمات التي معادلاتها

$x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ وبـ A' إلى مساحة D' الحيز المحدد بالمنحني (C_{-f})

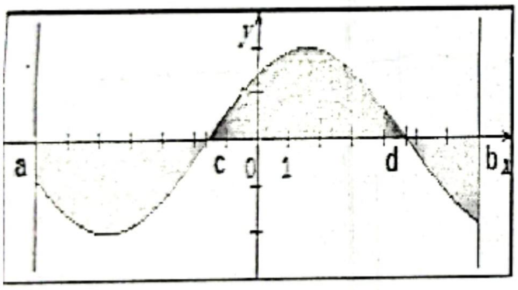
وبالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$.

بما أن f سالبة على $[a;b]$ فإن $-f$ موجبة على $[a;b]$ وبالتالي $A'=\int_a^b -f(x)dx$

الحيزان D و D' متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل فمساحتاهما متساويتان أي $A'=A$.

وبالتالي فإن $A=\int_a^b -f(x)dx$ أو $\int_a^b f(x)dx=-A$. نقول أحيانا أن $\int_a^b f(x)dx$ هي المساحة الجبرية للحيز D

فتكون سالبة إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ وتكون موجبة إذا كانت f موجبة على $[a;b]$.



5.تكامل دالة تغير اشارتها على مجال

لتكن مثلا f دالة مستمرة وتغير إشارتها على مجال $[a;b]$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نرمز بـ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) وبالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$.

نلاحظ مثلا في الشكل أعلاه أن f موجبة على $[c;d]$ و سالبة على المجالين $[a;c]$ و $[d;b]$.

نرمز بـ A_1 إلى مساحة الحيز D_1 ، بـ A_2 إلى مساحة الحيز D_2 وبـ A_3 إلى مساحة الحيز D_3. لدينا $A=A_1+A_2+A_3$ وبما أن $A_1=-\int_a^c f(x)dx$

، $A_2=\int_c^d f(x)dx$ و $A_3=-\int_d^b f(x)dx$ ، فإن $A=-\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx-\int_d^b f(x)dx$

<u>ملاحظة:</u>

بصفة عامة لحساب مساحة حيز محدد بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ وبمنحن ممثل لدالة f

تغير إشارتها على $[a;b]$ نقوم أولا بتحديد المجالات التي تحتفظ فيها الدالة بإشارة ثابتة (سالبة أو موجبة) ثم نطبق النتيجة المناسبة على كل مجال من هذه المجالات.

6. المكاملة بالتجزئة (التكامل بالتجزئة) الدرس

مبرهنة:

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين u' و v' مستمرتان على I.

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx=\left[u(x)\,v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

خواص

خاصية 1: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن:

- الدالة $f: x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.
- الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على I.

خاصية 2: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن:

- الدالة $f: x\mapsto \ln\left[u(x)\right]$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- الدالة $x\mapsto \ln\left[u(x)\right]$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ على I.