دراسة دالة لوغاريتمية رقم 06 (رائعة و بأفكار جديدة)

الجزء الأول:

نعتبر الدالة g المعرّفة على $]1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2-x-\ln(x-1)^2$.

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) عيّن نهايتي الدالة g عند 1 و عند $+\infty$.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3) أحسب $g(2)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]1;+\infty[$.

4) بيّن أنّ المعادلة $|g(x)|=1$ على المجال $]1;+\infty[$ تقبل حلان α و β حيث: $1,70<\alpha<1,71$ و $2,37<\beta<2,38$.

5) أ) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_g) عند النقطة ذات الترتيبة 1 ، ثم جد حصراً للعدد $\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}$.

ب) أنشئ كلاً من (Δ) و المنحني (C_g) .

ج) m عدد حقيقي ، ناقش بيانيا و حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $2-2\ln(x-1)=\frac{-2}{\alpha-1}x+m$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرّفة على $]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=[x-1+2\ln(x-1)][x-3+2\ln(x-1)]$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$ يكون: $f(x)=[g(x)]^2-1$.

2) عيّن نهايتي الدالة f عند 1 وَعند $+\infty$.

3) أ) أحسب $f'(x)$ و هذا من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$.

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

4) أ) جد إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل.

ب) أنشئ المنحني (C_f) في المعلم السابق.

5) لتكن h هي الدالة المعرّفة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ بـ: $h(x)=(\cos x+2\ln(\cos x))(-2+\cos x+2\ln(\cos x))$

أ) بيّن أنّ: $h=f\circ u$ ، حيث u دالة يطلب تعيين عبارتها.

ب) عيّن نهاية الدالة h عند $\frac{\pi}{2}$ و فسّر النتيجة بيانيا ، ثمّ استنتج إتجاه تغيّر الدالة h .

ج) شكّل جدول تغيرات الدالة h ، ثمّ أنشئ (Γ) منحني الدالة h .

حـل مختصر للدالة اللوغاريتمية رقم06

الجزء الأوّل: $g(x) = 2 - x - \ln(x-1)^2$

1) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} g(x) = +\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} (2-x) = 1 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} -\ln(x-1)^2 = +\infty \end{cases}$.

المستقيم ذو المعادلة : $x = 1$ مقارب موازي لحامل محور التراتيب للمنحني (C_g) .

❖) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (2-x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -\ln(x-1)^2 = -\infty \end{cases}$.

2) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

❖) الدالة المشتقة : $g'(x) = -1 - \dfrac{2}{x-1}$ ، أي : $g'(x) = \dfrac{-x-1}{x-1}$.

نلاحظ أنّه من أجل كل $x > 1$ تكون : $g'(x) < 0$ ، و منه : الدالة g متناقصة تماما على $]1;+\infty[$.

❖) جدول التغيرات :

x	1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

3) حساب $g(2)$:

$g(2) = 0$ ، سنلخص إشارة $g(x)$ في الجدول التالي :

x	1		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

4) لدينا : $|g(x)| = 1$ تكافئ : $g(x) = 1$ أو $g(x) = -1$.

❖) على المجال $]1;2[$ الدالة g مستمرة و رتيبة و صورة هذا المجال هي $]0;+\infty[$ و $1 \in]0;+\infty[$ ،

إذن المعادلة : $g(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1;2[$ ، (حسب مبرهنة القيم المتوسطة) .

❖) على المجال $]2;+\infty[$: الدالة g مستمرة و رتيبة و صورة هذا المجال هي $]-\infty;0[$ وَ $-1 \in]-\infty;0[$

إذن المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا β من المجال $]2;+\infty[$ (حسب مبرهنة القيم المتوسطة) .

❖) نحسب : $\begin{cases} g(1,70) = ... \\ g(1,71) = ... \end{cases}$ و منه : $1,70 < \alpha < 1,71$ ، $\begin{cases} g(2,37) = ... \\ g(2,38) = ... \end{cases}$ و منه : $2,37 < \beta < 2,38$.

5) كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الترتيبة 1 أي عند النقطة $A(\alpha;1)$:

$(\Delta): y = g'(\alpha)(x-\alpha)+g(\alpha)$ ، أي : $(\Delta): y = \frac{-\alpha-1}{\alpha-1}(x-\alpha)+1$ ،

و منه : $\boxed{(\Delta): y = \frac{-\alpha-1}{\alpha-1}x + \frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1}$

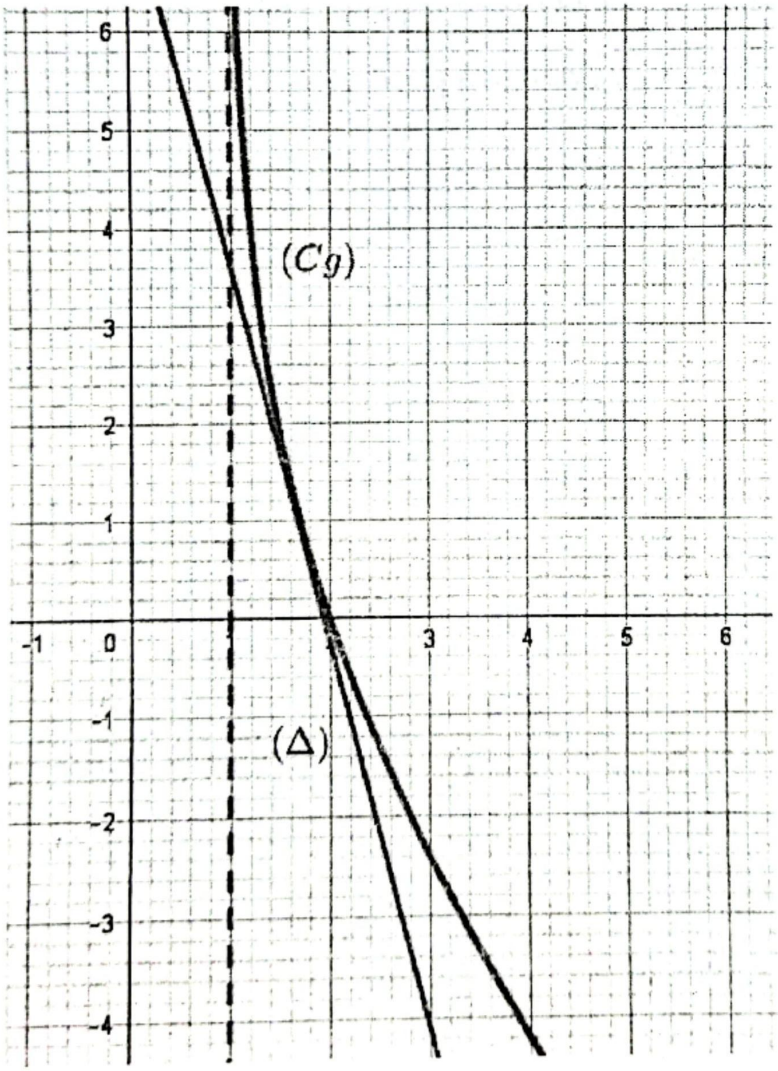
❖) حصر العدد $\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}$:

لدينا : $1,70 < \alpha < 1,71$ أي : $2,89 < \alpha^2 < 2,92$ أي : $4,59 < \alpha^2+\alpha < 4,63$.....(1) .

لدينا : $1,70 < \alpha < 1,71$ أي : $0,70 < \alpha-1 < 0,71$ أي : $\frac{1}{0,71} < \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{0,70}$.....(2) .

بضرب (1) في (2) نجد : $\frac{4,59}{0,71} < \frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1} < \frac{4,63}{0,70}$ و منه : $6,46 < \frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1} < 6,61$.

ب) إنشاء (Δ) و المنحني (C_g) :



ج) المناقشة البيانية :

لدينا من أجل كل $x > 1$: $2-2\ln(x-1) = \frac{-2}{\alpha-1}x + m$

أي : $2-x-2\ln(x-1) = \frac{-2}{\alpha-1}x - x + m$

أي : $g(x)=(\frac{-2}{\alpha-1}-1)x+m$ و منه : $g(x)=(\frac{-\alpha-1}{\alpha-1})x+m$.

و لدينا : $(\Delta): y=\frac{-\alpha-1}{\alpha-1}x+\underbrace{\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1}_{m}$ و منه المناقشة تكون كالتالي :

❖) إذا كان : $m>\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1$ فإنّ المعادلة تقبل حلين متمايزين .

❖) إذا كان : $m=\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1$ فإنّ المعادلة تقبل حل وحيد .

❖) إذا كان : $m<\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلول .

الجزء الثاني: $f(x)=[x-1+2\ln(x-1)][x-3+2\ln(x-1)]$.

1) نعلم أنّ :

$[g(x)]^2-1=[g(x)-1][g(x)+1]=[2-x-\ln(x-1)^2-1][2-x-\ln(x-1)^2+1]$ ،

و منه من أجل كل عدد حقيقي $x>1$ فإنّ : $[g(x)]^2-1=[1-x-2\ln(x-1)][3-x-2\ln(x-1)]$

و بحكم : $(-a)\times(-b)=a\times b$ أي : $[g(x)]^2-1=[x-1+2\ln(x-1)][x-3+2\ln(x-1)]$.

و عليه : $f(x)=[g(x)]^2-1$.

2) حساب النهايات : (نستعمل الشكل : $f(x)=[g(x)]^2-1$).

❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}[g(x)]^2-1=+\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} g(x)=+\infty$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)]^2-1=+\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

3) أ) حساب $f'(x)$ من أجل كل عددي حقيقي من $]1;+\infty[$: (نستعمل الشكل : $f(x)=[g(x)]^2-1$)

$f'(x)=2\times g(x)\times g'(x)$ ، و منه : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)\times g'(x)$.

x	1		2		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	
$g(x)\times g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ب) الدالة f متناقصة على المجال $]1;2]$ ، و متزايدة على المجال $[2;+\infty[$.

❖) جدول التغيرات :

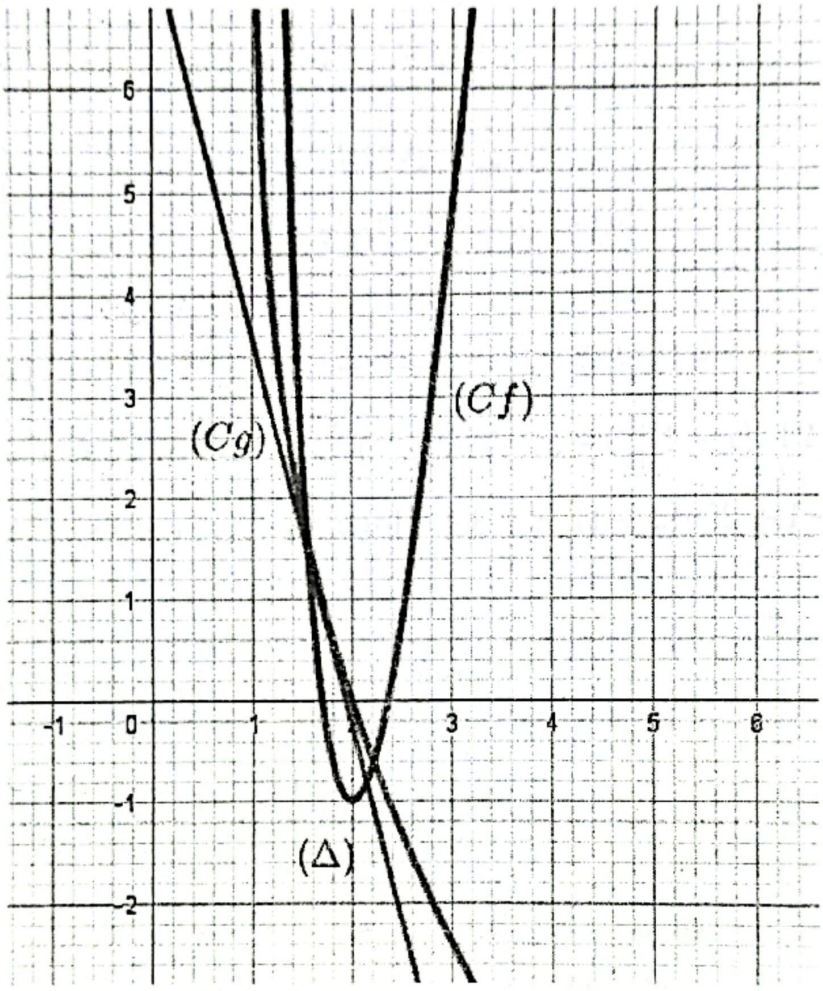
x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

4) نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل :

❖) نحل المعادلة $f(x)=0$ ، أي : $[g(x)]^2-1=0$ ، أي : $[g(x)]^2=1$ و منه : $\begin{cases} g(x)=1 \\ g(x)=-1 \end{cases}$

و عليه : $x=\alpha$ أو $x=\beta$. إذن : (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين : $A(\alpha;0)$ وَ $B(\beta;0)$.

❖) الإنشاء :



5) لدينا : $h(x)=(\cos x+2\ln\cos x)(-2+\cos x+2\ln\cos x)$.

أ) نلاحظ أنّ : $h(x)=f(1+\cos x)$ و منه : $h=f\circ u$ حيث : $u(x)=1+\cos x$.

ب)

❖) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}} h(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}} f(1+\cos x)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty \end{cases}$.

❖) التفسير الهندسي : المنحني (Γ) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور التراتيب معادلته : $x=\frac{\pi}{2}$.

❖) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة h : لدينا $h(x)=f(1+\cos x)$.

- من أجل كل $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ ، يكون : $0<\cos x\le 1$ ، أي : $1<1+\cos x\le 2$ ومنه : $1+\cos x\in\left]1;2\right]$

و الدالة f متناقصة على $]1;2]$.

- و من جهة أخرى لدينا الدالة $x \mapsto 1+\cos x$ متناقصة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

و منه : الدالة h متزايدة على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ و ذلك حسب مبرهنة إتجاه تغيّر دالة مركبة.

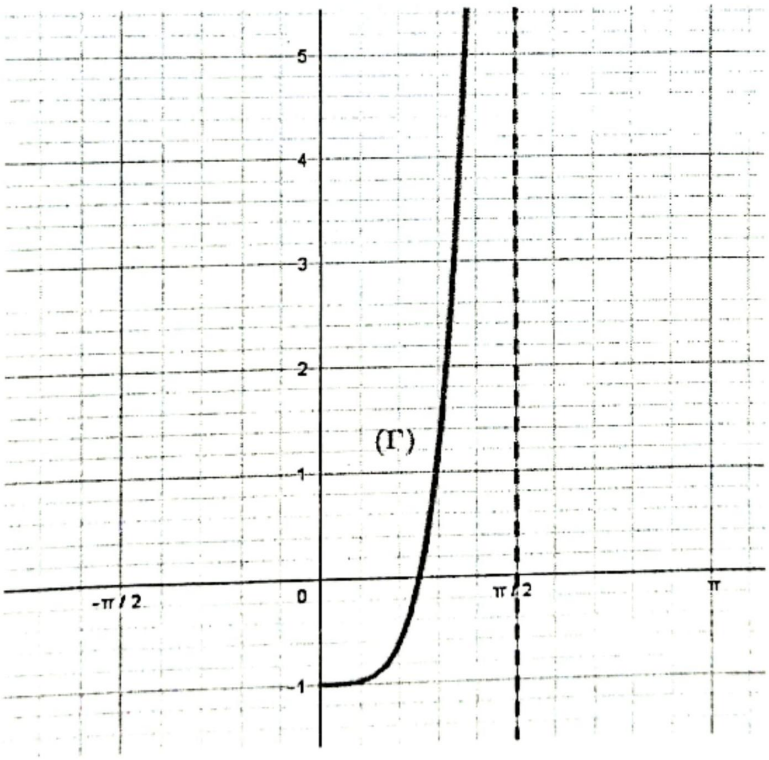
ج) جدول التغيرات للدالة h :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$h(x)$	-1 ↗	$+\infty$ ‖

❖) $h(0)=f(1+\cos(0))$ ، أي :

$h(0)=f(2)=-1$

❖) الإنشاء :



كتابة الأستاذ : بن ع