ثانوية محمود بن محمود- قالمة   السنة الدراسية : 2020/2019

القسم : 3ع 1   المدة : 01 سا

الفرض المحروس الثاني في مادة الرياضيات

التمرين 01 : (07 نقاط)

نعتبر كثير حدود f للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = 2x^2 - x - 1$.

1) عين جذور $f(x)$ ثم اكتب تحليلا لـ $f(x)$.

2) استنتج حلول المعادلة : $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$.

3) استنتج حلول المتراجحة : $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 < 0$.

التمرين 02 : (13 نقطة)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\mathrm{g}(x) = e^x - x - 1 .$$

ادرس اتجاه تغير الدالة g مستنتجا إشارتها ، ثم علل أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$e^x - x > 0$$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1) احسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$ ثم فسر النتائج هندسيا .

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم أعط جدول تغيراتها .

3) عين معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة التي فاصلتها 0 .

4) ادرس الوضعية النسبية لـ $(\mathcal{C}_f)$ و (T) ، ماذا نسمي النقطة التي فاصلتها 0 ؟

5) ارسم (T) و $(\mathcal{C}_f)$ في المعلم السابق .

بالتوفيق

عرض حال للفرض الثاني
في الرياضيات
3 ع ت

التمرين 01: (07 نقاط)

$f(x)=2x^2-x-1$

1) - تعيين جذور $f(x)$: (2)

بما أن $2-1-1=0$ فإن:

$x_1=1$

$x_2=\frac{c}{a}=\frac{-1}{2}$

* تحليل $f(x)$:

$f(x)=2(x+\frac{1}{2})(x-1)$

$f(x)=(2x+1)(x-1)$ (1)

2) - استنتاج حلول المعادلة: $2(\ln x)^2-\ln x-1=0$

$2(\ln x)^2-\ln x-1=0$; $D=]0;+\infty[$

بوضع $y=\ln x$ تصبح المعادلة:

$2y^2-y-1=0$

ومنه:

$\begin{cases} y=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \ln x=1 \\ \ln x=-\frac{1}{2} \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x=e \\ x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$ (2)

$S=\left\{e;\frac{1}{\sqrt{e}}\right\}$

3) - استنتاج حلول المتراجحة: (2)

$2(\ln x)^2-\ln x-1<0$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		e		$+\infty$
$2(\ln x)^2-\ln x-1$		+	0	−	0	+	

$S=]\frac{1}{\sqrt{e}};e[$

التمرين 02: (13 نقطة)

I) - $g(x)=e^x-x-1$; $D_g=\mathbb{R}$

* دراسة اتجاه تغير الدالة g:

* النهايات:

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x-x-1)=+\infty$ (0,5)

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^x-x-1)=\lim\left(e^x\left(1-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)\right)=+\infty$ (0,5)

* المشتقة: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$:

$g'(x)=e^x-1$ (0,5)

$e^x-1=0$

$e^x=e^0 \to x=0$

$e^x-1>0$

$e^x>e^0 \to x>0$

$e^x-1<0 \to e^x<e^0 \to x<0$

(0,5)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	

* التغيرات للدالة (0,5)

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

(0,5)

$g(0)=e^0-0-1=0$

* استنتاج اشارة $g(x)$: (0,5)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		+	0	+	

* التعليل أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$e^x-x>0$

لدينا: $g(x)\geq 0$ معناه: $e^x-x-1\geq 0$

ومنه: $e^x-x\geq 1$ (0,5)

إذن: $e^x-x>0$

II) $f(x)=\frac{x}{e^x-x}$; $D_f=\mathbb{R}$

1) - حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^x - x}\right) = \lim\left(\frac{\cancel{x}(1)}{\cancel{x}\left(\frac{e^x}{x}-1\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}-1}\right) = -1$$ (0,25)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x - x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x}(1)}{\cancel{x}\left(\frac{e^x}{x}-1\right)}\right)$$

$$= 0$$ (0,25)

* التفسير الهندسي:

(0,25) مستقيم مقارب أفقي في جوار $-\infty$: $y=-1$

(0,25) مستقيم مقارب أفقي في جوار $+\infty$: $y=0$

2)- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{(e^x - x) - (e^x - 1)x}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x - \cancel{x} - xe^x + \cancel{x}}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$$ (0,25)

$e^x>0$ و $(e^x-x)^2>0$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

(0,25)

$1-x=0 \to x=1$

(0,25) التغير لغويا :

(0,25) جدول التغيرات: منه

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

$$f(1) = \frac{1}{e-1}$$

3)- معادلة المماس (T) لـ $(\mathcal{C})$ عند النقطة التي فاصلتها 0 :

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$f'(0) = \frac{(1-0)e^0}{(e^0-0)^2} = 1$$

$$f(0) = 0$$

ومنه: $\boxed{(T): y = x}$ (1)

4)- دراسة وضعية $(\mathcal{C})$ و (T) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x)-y = \frac{x}{e^x-x} - x = \frac{x - x(e^x-x)}{e^x-x}$$

$$f(x)-y = \frac{x - xe^x + x^2}{e^x-x} = \frac{-x(-1+e^x-x)}{e^x-x}$$

$$f(x)-y = \frac{-x\cdot g(x)}{e^x-x}$$ (0,25)

لدينا: $e^x-x>0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة الجداء: $-x\times g(x)$ (0,25)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	$(\mathcal{C})$ فوق (T)	$(\mathcal{C})$ يقطع (T)	$(\mathcal{C})$ تحت (T)

(1)

تمثل النقطة $(0,0)$ نقطة انعطاف لـ $(\mathcal{C})$ (1)