(القسمة الاقليدية في مجموعة الأعداد الصحيحة Z)

1| قابلية القسمة في Z:

ليكن a و b عددان صحيحان مع $b \neq 0$، نقول أن العدد b **يقسم العدد** a أو b **قاسم للعدد** a إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح k حيث $a = kb$ ونكتب $b \mid a$

✓ للعددين الصحيحين a و $-a$ نفس القواسم في المجموعة □

مثال1:

- $10 \mid 50$ لأن $50 = 10 \times 5$
- $3 \mid (-39)$ لأن $-39 = 3 \times (-13)$
- $(-18) \mid 1890$ لأن $1890 = (-105) \times (-18)$

2| القسمة الاقليدية في Z:

من أجل كل عدد صحيح a و $b \in$ □ حيث $b \neq 0$، توجد ثنائية وحيدة (q,r) تحقق: $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$

ملاحظة:

✓ $r < b$ معناه الباقي أصغر تماماً من القاسم b

✓ عملية إيجاد الثنائية (q,r) تسمى القسمة الإقليدية.

أمثلة:

$78 = 7 \times 11 + 1$ ومنه 11 هو حاصل قسمة 78 على 7 وباقيها هو 1.

$155 = (-8) \times (-19) + 3$ ومنه (-19) هو حاصل قسمة 155 على (-8) وباقيها هو 3.

$-48 = (-12) \times 4$ ومنه (-12) هو حاصل قسمة (-48) على 4 وباقيها هو 0.

3| الموافقة في Z:

1.3/ تعريف الموافقة في Z:

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم

- القول أن a و b متوافقان بترديد n معناه أن a و b لهما **نفس باقي القسمة الإقليدية** على العدد n.
- إذا كان a و b متوافقان بترديد n نكتب $a \equiv b[n]$ أو $a \equiv b(n)$ ونقرأ " a يوافق b بترديد n "

2.3/ مبرهنة: $(a,b) \in$ □ ^{2} و $n \in$ □ *

يكون العددين a و b متوافقان بترديد n إذا وفقط إذا كان العدد $a - b$ مضاعفاً للعدد n.

أمثلة:

- $14 \equiv 8[3]$ لأن $14 - 8 = 6$ و 6 مضاعف للعدد 3.
- $-26 \equiv 9[5]$ لأن $-26 - 9 = -35$ و -35 مضاعف للعدد 5.
- $250 \equiv 0[10]$ لأن $250 - 0 = 250$ و 250 مضاعف للعدد 10.

3.3/ باقي قسمة عدد صحيح على عدد طبيعي غير معدوم:

خاصية: n عدد طبيعي غير معدوم

كل عدد صحيح a يوافق بترديد n باقي قسمته على n.

نتيجة: يكون العدد a قابل للقسمة على n إذا وفقط إذا كان $a=0[n]$.

أمثلة:

- $34=6[7]$ ومنه باقي قسمة 34 على 7 هو 6.
- باقي قسمة 528 على 10 هو 8 ونكتب: $528=8[10]$
- العدد 825 يقبل القسمة على 3 معناه: $825=0[3]$

4.3/ خواص الموافقات في z:

ليكن a و b، c و d أعداد صحيحة و n عدد طبيعي غير معدوم:

- $a=a[n]$ | كل عدد متوافق مع نفسه.
- إذا كان $a=b[n]$ فإن $b=a[n]$
- إذا كان $a=b[n]$ و $b=c[n]$ فإن $a=c[n]$
- إذا كان $a=b[n]$ و $c=d[n]$ فإن $\left.\begin{array}{l} a+c=b+d[n] \\ a\times c=b\times d[n] \end{array}\right\}$
- من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p لدينا: إذا كان $a=b[n]$ فإن $a^p=b^p[n]$.
- بما أن $a=a[n]$ فإن:
  - إذا كان $c=d[n]$ فإن $c+a=d+a[n]$
  - إذا كان $c=d[n]$ فإن $c\times a=d\times a[n]$

أمثلة:

- لدينا: $12=3[9]$ و $29=2[9]$ ما يلي:

  $12+29=3+2[9]$ و $12\times 29=3\times 2[9]$ معناه $41=5[9]$ و $348=6[9]$
- لدينا $34=1[11]$ ومنه $34^{2011}=1^{2011}[11]$ تعني $34^{2011}=1[11]$.
- لدينا $8=0[2]$ ومنه $8^3=0[2]$.

(الاستدلال بالتراجع)

1| مبدأ الاستدلال بالتراجع:

لتكن $p(n)$ خاصية تتعلق بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي.

لإثبات صحة الخاصية $p(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يجب أن:

1. نتحقق من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $p(n_0)$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $p(n)$ ونبرهن صحة هذه الخاصية من أجل $n+1$ أي $p(n+1)$.

مثال1: لنثبت صحة الخاصية التالية:

من أجل كل عدد طبيعي n: $1+3+5+\dots+(2n+1)=(n+1)^2$

1. من أجل $n=0$ لدينا: $1=(0+1)^2$ محققة من أجل $n=0$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $n\geq 0$ أي: $1+3+5+\dots+(2n+1)=(n+1)^2$.

ولنبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي: $1+3+5+\dots+(2n+3)=(n+2)^2$

لدينا

$$\begin{aligned}1+3+5+\dots+(2n+3)&=[1+3+5+\dots+(2n+1)]+(2n+3)\\&=(n+1)^2+(2n+3)\\&=n^2+2n+1+2n+3\\&=n^2+4n+4\\&=(n+2)^2\end{aligned}$$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ وعليه من أجل كل عدد طبيعي n: $1+3+5+\dots+(2n+1)=(n+1)^2$

مثال2: لنثبت صحة الخاصية التالية:

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n العدد n^2+n مضاعف للعدد 2

1. من أجل $n=1$ لدينا: $1^2+1=2$ و 2 مضاعف للعدد 2 محققة من أجل $n=1$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $n\geq 1$ أي: n^2+n مضاعف للعدد 2، وهذا يعني أن $n^2+n=2k$ حيث k عدد طبيعي غير معدوم.

ولنبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي: $(n+1)^2+(n+1)$ مضاعف للعدد 2

لدينا:

$$\begin{aligned}(n+1)^2+(n+1)&=n^2+2n+1+n+1\\&=n^2+3n+2\\&=(n^2+n)+2(n+1)\end{aligned}$$

بمعنى

$$\left.\begin{aligned}&n^2+n=2k\\&(n+1)^2+(n+1)=2k+2(n+1)=2(k+n+1)\end{aligned}\right|$$

بما أن العدد الطبيعي $2(k+n+1)$ مضاعف للعدد 2 فإن العدد $(n+1)^2+(n+1)$ مضاعف للعدد 2 ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ وعليه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n العدد n^2+n مضاعف للعدد 2

(التشفير التالفي)

تعريف:

نضع $N = \{0,1,2,3,\ldots,27\}$

في الأبجدية العربية، نقصد بالتشفير التالي إرفاق كل حرف أبجدي مرقم بعدد x من N بالعدد الطبيعي y باقي قسمة $ax+b$ على 28 أي $y \equiv ax+b[28]$ حيث $a \neq 0$ و a، b عددان طبيعيان.

ملاحظة:

في بعض الأحيان نحصل على حروف لها نفس الشفرة، لذلك ولتجنب الوقوع في مثل هذه الحالات نختار العدد a أولي مع 28

مثال: نرقم الحروف الأبجدية العربية بعدد x ونأخذ $a=9$ و $b=5$، فيكون العدد y معرف بـ: $y \equiv 9x+5[28]$ (y هو باقي قسمة $9x+5$ على 28) ومنه نحصل على الجدول الموالي:

الحرف	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي	ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ	ش	ت	ث	خ
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27				
y	5	14	23	4	13	22	3	12	21	2	11	20	1	10	19	0	9	18	27	8	17	26	7	16	25	6	15	24				
التشفير	د	ف	س	و	م	ح	هـ	ر	غ	ج	ل	ع	ب	ش	ط	أ	ز	ت	خ	ق	ض	ذ	ي	ص	ظ	ك	ث	ن				

- ✓ الكلمة التي تشفيرها "د ع ب ر د ت ر د ح" هي "الرياضيات"
- ✓ تشفير الكلمة "التربية" هو "د ع ح ب ف ر و"
- ✓ تشفير العبارة "استعد للبكالوريا" هو "د ص ح ض ح ع ع ف هـ د ع م ب ر د"

تطبيق 1:

ليكن a، b و c ثلاثة أعداد صحيحة حيث: $\begin{cases} a = 132 \\ b = 49 \\ c = -330 \end{cases}$

1 | أثبت أن c يقبل القسمة على a

2 | عين باقي قسمة العدد a على b. ثم أعط حصر للعدد a بين مضاعفين متعاقبين للعدد b.

3 | عين باقي قسمة العدد c على b. ثم أعط حصر للعدد c بين مضاعفين متعاقبين للعدد b.

الحل:

① إثبات أن c يقبل القسمة على a :

لدينا: $c = -3300 = -(-25)\times 132 = -(-25)\times a$ و منه $a|c$ و عليه c يقبل القسمة على a

② • تعيين باقي قسمة a على b :

لدينا: $a = 132 = 49\times 2+34 = b\times 2+34$ و منه باقي قسمة a على b هو 34 .

• تعيين حصرا للعدد a بين مضاعفين متعاقبين للعدد b :

حاصل قسمة a على b هو 2 و منه $49\times 2 \leq 132 < 49\times(2+1)$ أي: $98 \leq a < 147$

③ • تعيين باقي قسمة c على b :

لدينا: $C = -3300 = 49\times(-68)+32 = b\times(-68)+32$ و منه باقي قسمة c على b هو 32 .

• تعيين حصرا للعدد c بين مضاعفين متعاقبين للعدد b :

حاصل قسمة c على b هو -68 و منه: $49\times(-68) < -3300 < 49\times(-68+1)$

أي: $-3332 < c < -3283$.

تطبيق

باقي قسمة العدد الصحيح a على 12 هو 9

1 | عين باقي قسمة العدد a على كل من الأعداد 3، 4 و 6.

2 | عين باقي قسمة كل من الأعداد: $a+2$ ، $a+7$ و $2a-10$ على 12.

الحل:

① تعيين باقي قسمة العدد a على كل من الأعداد 3، 4 و 6.

لدينا : $a = 12k + 9$ حيث k عدد صحيح .

• لدينا : $a = 12k + 9 = 3 \times 4k + 3 \times 3$ أي $a = 3(4k+3)$

بما أن $4k + 3$ عدد صحيح فإن باقي قسمة a على 3 هو 0.

• لدينا : $a = 12k + 9 = 4 \times 3k + 4 \times 2 + 1$ أي $a = 4(3k+2)+1$

بما أن $3k + 2$ عدد صحيح فإن باقي قسمة a على 4 هو 1.

• لدينا : $a = 12k + 9 = 6 \times 2k + 6 + 3$ أي $a = 6(2k+1)+3$

بما أن $2k + 1$ عدد صحيح فإن باقي قسمة a على 6 هو 3.

② تعيين باقي قسمة كل من $a+2$ ، $a+7$ و $2a-10$ على 12:

• لدينا : $a+2 = 12k+9+2 = 12k+11$

بما أن k عدد صحيح فإن باقي قسمة $a+2$ على 12 هو 11.

• لدينا : $a+7 = 12k+9+7 = 12k+16 = 12k+12+4 = 12(k+1)+4$

بما أن $k+1$ عدد صحيح فإن باقي قسمة $a+7$ على 12 هو 4.

• لدينا : $2a-10 = 24k+18-10 = 12\times(2k)+8$

بما أن $2k$ عدد صحيح فإن باقي قسمة $2a-10$ على 12 هو 8.

تطبيق 3:

① عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق : $a \times b = 36$.

② عين جميع الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية بحيث : $(x+y)x = 36$.

③ عين جميع الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية بحيث $x^2 - y^2 = 36$.

الحل:

① تعيين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق $a \times b = 36$:

لدينا : $36 = 1\times 36 = 2\times 18 = 3\times 12 = 4\times 9 = 6\times 6$

و عليه الثنائيات (a,b) التي تحقق $a\times b = 36$ هي : $(1,36)$ ، $(2,18)$ ، $(3,12)$ ، $(4,9)$ ، $(6,6)$ ، $(36,1)$ ، $(18,2)$ ، $(12,3)$ ، $(9,4)$

② تعيين جميع الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية بحيث $(x+y)x = 36$:

لدينا : $(x+y)x = 36$ و منه جداء العددين $x+y$ و x هو 36، و نلاحظ أن $x+y \geq x$

و منه حسب السؤال "1" ينتج لنا :

$$\begin{cases} x+y=36 \\ x=1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x+y=18 \\ x=2 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x+y=12 \\ x=3 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x+y=9 \\ x=4 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x+y=6 \\ x=6 \end{cases}$$

أي $(x,y)=(1,35)$ أو $(x,y)=(2,16)$ أو $(x,y)=(3,9)$ أو $(x,y)=(4,5)$

أو $(x,y)=(6,0)$ و عليه الثنائيات (x,y) هي : $(1,35)$ ، $(2,16)$ ، $(3,9)$ ، $(4,5)$

و $(6,0)$.

③ تعيين جميع الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية بحيث $x^2 - y^2 = 36$:

لدينا : $x^2 - y^2 = 36$ أي $(x+y).(x-y) = 36$ و منه جداء العددين $x+y$ و $x-y$

هو 36، و نلاحظ أن $x+y \geq x-y$ و منه حسب السؤال "1" ينتج لنا :

$$\begin{cases} x+y=36 \\ x-y=1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x+y=18 \\ x-y=2 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x+y=12 \\ x-y=3 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x+y=9 \\ x-y=4 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x+y=6 \\ x-y=6 \end{cases}$$

أي : $(x,y)=(\frac{37}{2},\frac{35}{2})$ أو $(x,y)=(10,8)$ أو $(x,y)=(\frac{15}{2},\frac{9}{2})$

أو $(x,y)=(\frac{13}{2},\frac{5}{2})$ أو $(x,y)=(6,0)$.

بما أن الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية فإن : $(x,y)=(10,8)$ أو $(x,y)=(6,0)$

و عليه الثنائيات (x,y) هي : $(10,8)$ ، $(6,0)$.

تطبيق 4:

n عدد طبيعي حيث $n \equiv 4[9]$

• عين باقي قسمة كل من الأعداد $n+16$ ، $3n+5$ ، n^2-n و $(n+1)(2n+1)$ على 9.

الحـــل :

• لدينا : $n=4[9]$ ومنه $n+16=20[9]$. بما أن $20 \equiv 2[9]$ فإن $n+16 \equiv 2[9]$.

وعليه باقي قسمة العدد $n+16$ على 9 هو 2.

• لدينا : $n=4[9]$ إذن $3n=12[9]$ ومنه $3n+5 \equiv 17[9]$.

بما أن $17 \equiv 8[9]$ فإن $3n+5=8[9]$.

وعليه باقي قسمة العدد $3n+5$ على 9 هو 8.

• لدينا: $n \equiv 4[9]$ إذن $n^2 \equiv 4^2[9]$ و $-n \equiv -4[9]$ ومنه $n^2+(-n) \equiv 16+(-4)[9]$

أي $n^2-n=12[9]$. بما أن $12 \equiv 3[9]$ فإن $n^2-n \equiv 3[9]$

وعليه باقي قسمة العدد n^2-n على 9 هو 3.

• لدينا : $n=4[9]$ إذن $n+1 \equiv 5[9]$ و $2n+1 \equiv 9[9]$

ومنه $(n+1)(2n+1) \equiv 5 \times 9[9]$ أي $(n+1)(2n+1) \equiv 45[9]$.

بما أن $45 \equiv 0[9]$ فإن $(n+1)(2n+1) \equiv 0[9]$.

وعليه باقي قسمة العدد $(n+1)(2n+1)$ على 9 هو 0

ليكن x و y عددان طبيعيان حيث : $x=5[6]$ و $y \equiv 3[6]$

- عين باقي القسمة الإقليدية على 6 لكل من الأعداد : $3x+4y$ ، x^2+y^2 ، $2x^2-5y^2$

الحـــل :

• لدينا : $x=5[6]$ و $y \equiv 3[6]$ إذن $3x \equiv 15[6]$ و $4y \equiv 12[6]$

ومنه $3x+4y=15+12[6]$ أي $3x+4y \equiv 27[6]$.

بما أن $27 \equiv 3[6]$ فإن $3x+4y=3[6]$.

وعليه باقي قسمة العدد $3x+4y$ على 6 هو 3

• لدينا: $x=5[6]$ و $y \equiv 3[6]$ إذن $x^2 \equiv 5^2[6]$ و $y^2 \equiv 3^2[6]$.

أي $x^2 \equiv 25[6]$ و $y^2 \equiv 9[6]$ ومنه $x^2+y^2 \equiv 25+9[6]$ أي $x^2+y^2 \equiv 34[6]$.

بما أن $34 \equiv 4[6]$ فإن $x^2+y^2 \equiv 4[6]$.

وعليه باقي قسمة العدد x^2+y^2 على 6 هو 4.

• لدينا : $x \equiv 5[6]$ و $y \equiv 3[6]$ إذن $x^2 \equiv 25[6]$ و $y^2 \equiv 9[6]$.

ومنه $2x^2 \equiv 50[6]$ و $-5y^2 \equiv -45[6]$ إذن $2x^2-5y^2 \equiv 50-45[6]$

تطبيق 5:

n عدد طبيعي

1| بين أن $4^3 \equiv 1[7]$، ثم استنتج بواقي قسمة كل من الأعداد 4^{3n}، 4^{3n+1} و 4^{3n+2} على 7.

2| عين باقي قسمة كل من العددين 11^{64} و 3^{650} على 7.

3| a عدد طبيعي حيث $a = 16^{1968} + 3\times 4^{1972}$، بين أن: $a \equiv 6[7]$.

الحل:

① • إثبات أن $4^3 \equiv 1[7]$:

لدينا $4^3 = 64$ وباقي قسمة العدد 64 على 7 هو 1، وعليه: $4^3 \equiv 1[7]$.

• الإستنتاج :

- لدينا : $4^3 \equiv 1[7]$ ومنه $(4^3)^n \equiv 1^n[7]$ أي $4^{3n} \equiv 1[7]$.

وعليه : باقي قسمة 4^{3n} على 7 هو 1.

- لدينا : $4^{3n} \equiv 1[7]$ و $4 \equiv 4[7]$ ومنه $4^{3n}\times 4 \equiv 1\times 4[7]$ أي $4^{3n+1} \equiv 4[7]$.

وعليه : باقي قسمة 4^{3n+1} على 7 هو 4.

- لدينا : $4^{3n+1} \equiv 4[7]$ و $4 \equiv 4[7]$ ومنه $4^{3n+1}\times 4 \equiv 4\times 4[7]$ أي $4^{3n+2} \equiv 16[7]$

بما أن $16 \equiv 2[7]$ فإن $4^{3n+2} \equiv 2[7]$.

وعليه : باقي قسمة 4^{3n+2} على 7 هو 2.

② تعيين باقي قسمة كل من العددين 11^{64} و 3^{650} على 7:

- لدينا : $11 \equiv 4[7]$ إذن $11^{64} \equiv 4^{64}[7]$.

بما أن $64 = 3\times 21 + 1$ فإن $4^{64} \equiv 4[7]$ ومنه $11^{64} \equiv 4[7]$.

وعليه : باقي قسمة 11^{64} على 7 هو 4.

- لدينا : $3 \equiv -4[7]$ إذن $3^{650} \equiv (-4)^{650}[7]$ أي $3^{650} \equiv 4^{650}[7]$.

بما أن $650 = 3\times 216 + 2$ فإن $4^{650} \equiv 2[7]$ ومنه $3^{650} \equiv 2[7]$.

وعليه : باقي قسمة 3^{650} على 7 هو 2.

③ إثبات أن $a \equiv 6[7]$:

لدينا : $16 = 4^2$ إذن $16^{1968} = (4^2)^{1968}$ أي $16^{1968} = 4^{3936}$.

بما أن $3936 = 3\times 1312$ فإن $4^{3936} \equiv 1[7]$ ومنه $16^{1968} \equiv 1[7]$.

ولدينا : $1972 = 3\times 657 + 1$ إذن $4^{1972} \equiv 4[7]$ ومنه $3\times 4^{1972} \equiv 12[7]$.

بما أن $12 \equiv 5[7]$ فإن $3\times 4^{1972} \equiv 5[7]$.

ومنه : $16^{1968} + 3\times 4^{1972} \equiv 1+5[7]$

أي $16^{1968} + 3\times 4^{1972} \equiv 6[7]$. وعليه : $a \equiv 6[7]$.

بالتوفيق في شهادة البكالوريا إن شاء الله

1. عموميات (المتتاليات)

1. مفهوم متتالية: كل " دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية □ في □ تسمّى متتالية عددية. لمتغير n.

2. مصطلحات وتعابير: المتتاليات تستعمل بعض المصطلحات العامة:

1. رمز عادة لمتتالية بالرموز: u، v، w،.....
2. رمز لصورة عدد طبيعي n بمتتالية بالشكل $U(n)$ أو U_n ونقرأ: U دليل n.
3. العدد U_n يسمى الحدّ العام للمتتالية وهو الحدّ الذي رتبته n.
4. رمز لمتتالية كذلك ب U_n أو $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

أمثلة: u هي المتتالية المعرفة على " □ بالشكل: $U_n = \frac{1}{n}$

الحدّ الذي رتبته 100 لهذه المتتالية هو: $U_{100} = \frac{1}{100}$.

ملاحظة: يمكن أن تكون المتتالية معرفة بدءاً من رتبة معينة.

3. طرق توليد متتالية: يمكن توليد متتالية بالطرق التوالية:

1 إعطاء قيمة كل " حدود المتتالية (عدد الحدود منته):

مثال: 1، 4، $\frac{11}{2}$، 7....

2 بعبارة من الشكل $U_n = f(n)$

تعطى المتتالية على شكل دستور يسمح بحساب كل حدّ بدلالة n مباشرة.

مثال: u متتالية معرفة بالعبارة التالية: $U_n = 2n^2 - 3$

في هذه الحالة نجد الحد الأول: $U_0 = -3$ والحد الثاني $U_1 = 2\times1^2 - 3 = -1$.....الحد العشرون $u_{19} = 2\times19^2 - 3 = 719$

3 بعلاقة تراجعية:

يمكن تعريف متتالية بإعطاء:

- الحد الأول U_0.
- العلاقة التي تسمح بتعيين كل حدّ انطلاقا من الحد السابق. ونسمي هذه العلاقة "علاقة تراجعية".

مثال: v متتالية معرفة بحدّها الأول $v_0 = 2$ والعلاقة: $v = 3v_n - 2$

لدينا: $v_1 = 3\times v_0 - 2 = 3\times2 - 2 = 4$.....

4. التمثيل البياني لمتتالية:

التمثيل البياني لمتتالية U هو مجموع النقط ذات الإحداثيات $(n;U_n)$ في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ للمستوي.

مثال: لتكن U متتالية معرفة على □ حيث: $U_n = n^2 + 4$ (لدينا التمثيل التالي).

5. اتجاه تغير متتالية:

(U_n) متتالية معرفة على □:

a) إذا كان $U_n < U_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n، نقول أن المتتالية متزايدة تماماً.

b) إذا كان $U_n > U_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n، نقول أن المتتالية متناقصة تماماً.

c) إذا كان $U_n = U_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n، نقول أن المتتالية ثابتة.

ملاحظة: عندما نستبدل الرمز $<$ أو $>$ بالرمز $\leq$ أو $\geq$ نقول إن المتتالية u متزايدة أو متناقصة.

متتالية رتيبة: نقول عن متتالية أنها رتيبة إذا وفقط إذا كانت متزايدة (تماما) أو متناقصة (تماما).

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (U_n) يمكن أن ندرس إشارة $U_{n+1}-U_n$

أمثلة:

دراسة اتجاه تغير المتتالية U حيث: $U_n = n^2$

لدينا: $U_{n+1} = (n+1)^2 = n^2+2n+1$

نجد أن $n^2 < n^2+2n+1$ معناه $U_n < U_{n+1}$ إذا المتتالية متزايدة تماما.

---

2. المتتاليات الحسابية

2.1/ تعريف: نقول عن متتالية (U_n) أنها متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r حيث:

من أجل $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = U_n + r$ (نقصد بها المرور من حد إلى الحد الموالي له بإضافة نفس العدد الثابت) **كذلك** $U_{n+1} - U_n = r$

نسمي r أساس المتتالية (U_n). مثال: $U_{n+1} = U_n - 2$ مع $U_0 = 2$.

ملاحظة: إذا كان $r = 0$ فان الحدود متساوية وعليه المتتالية ثابتة.

2.2/ حساب الحد العام (U_n): يمكن حساب الحد العام بإحدى الطرق الموالية:

1. بإعطاء الحد الأول u_0 والأساس r

(U_n) متتالية حسابية ذات الحد الأول U_0 والأساس r معناه:

من أجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا: $U_n = U_0 + nr$ (المتتالية الحسابية للأعداد الفردية: $U_n = 1+2n$ ؛ $r = 2/u_0 = 1$)

2. بإعطاء حد كيفي للمتتالية والأساس:

(U_n) متتالية حسابية علم حدّ منها U_p كيفي والأساس r معناه:

من أجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا: $U_n = U_p + (n-p)r$

مثال: (U_n) متتالية حسابية حيث $u_{10} = 15$ وأساسها $r = \frac{3}{2}$

$u_n = u_{10} + (n-10)\times\frac{3}{2}$ ومنه: $u_{35} = 15 + (35-10)\times\frac{3}{2} = 52.5$

3. خاصية ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية:

تكون الأعداد $a;b;c$ بهذا الترتيب حدوداً متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان: $a+c = 2b$

يسمى العدد b بالحساب الوسط للعددين a و c.

مثال: الأعداد 2، 7، 12 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية حسابية لأن: $2+12 = 2\times 7$.

4. مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

(U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 والأساس r معناه

من أجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)\frac{(u_0+u_n)}{2}$ وكذلك من أجل $u_1 + u_2 \dots + u_n = n\frac{(u_1+u_n)}{2}$

نحصل على مجموع حدود متتالية متتابعة لمتتالية حسابية بالقاعدة: ((الحد الأخير+الحد الأول)/2) ×عدد الحدود

5. نتيجة:

متتالية الأعداد الطبيعية غير المنعدمة هي متتالية حسابية، حدّها الأول **1** وأساسها **1**:

ومجموع حدّها الأول هو: $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

مثال: $1+2+3+\dots+99=\frac{99(99+1)}{2}=4950$

2.3/ التمثيل البياني لمتتالية حسابية:

التمثيل البياني لمتتالية حسابية U هو مجموع النقط المنعزلة الواقعة على نفس الاستقامة ذات الإحداثيات $(n;U_n)$ في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ للمستوي.

مثال: لتكن U متتالية حسابية التي حدها الأول **1** وأساسها **2**: $u_n=1+2n$

2.4/ اتجاه التغير:

(U_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_0 وأساسها r حيث:

- **إذا كان r موجباً تماماً فالمتتالية متزايدة تماماً.**
- **إذا كان r سالباً تماماً فالمتتالية متناقصة تماماً.**
- **إذا كان r منعدماً فالمتتالية ثابتة.**

ملاحظة: معامل توجيه المستقيم في كل تمثيل لمتتالية حسابية هو أساس المتتالية الممثلة.

أمثلة:

أدرس تغيرات كل من: $u_n=3+4n$ و $v_n=1-4n$ ثم مثلهما بيانيا في معلم للمستوى $(o;\vec{i};\vec{j})$.

3. المتتاليات الهندسية

1.3/ تعريف: نقول عن متتالية (U_n) أنها متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي غير معدوم q حيث:

من أجل $n\in\mathbb{N}$: $U_{n+1}=q\times U_n$ (نقصد بها المرور من حدّ إلى الحد الموالي له بالضرب في نفس العدد الثابت q)

نسمي q أساس المتتالية (U_n). مثال: $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n$ مع $q=\frac{1}{2}$.

ملاحظة: إذا كان $q=1$ فان الحدود متساوية وعليه فالمتتالية ثابتة.

2.3/ حساب الحد العام (U_n): يمكن حساب الحد العام بإحدى الطرق التالية:

1 بإعطاء الحد الأول u_0 والأساس q

(U_n) متتالية هندسية ذات الحد الأول U_0 والأساس q معناه:

من أجل $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $U_n=q^n\cdot U_0$ (مثال: لتكن متتالية هندسية حيث: $U_0=1$، $q=2$)

2 بإعطاء حدّ كيفي للمتتالية والأساس:

(U_n) متتالية هندسية علم حدّ منها U_p كيفي والأساس q معناه:

من أجل $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $U_n=U_p\times q^{n-p}$

مثال: (U_n) متتالية هندسية حيث $u_3=\frac{15}{7}$ وأساسها $q=\frac{3}{2}$

$u_n=u_3+q^{n-3}$ ومنه: $u_3=u_3\cdot q^{3-3}=\left(\frac{15}{7}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2$

3 خاصية ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية:

تكون الأعداد $a;b;c$ بهذا الترتيب حدوداً متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان: $a\times c=b^2$

يسمى العدد b بالوسط الهندسي للعددين a و c.

مثال: الأعداد 25، 5، 1 هذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية هندسية لأن: $1\times 25=5^2$.

4 مجموعة حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

(U_n) متتالية هندسية أساسها q حيث $q\neq 1$

من أجل $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $u_0+u_1+.....+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

كذلك من أجل n_1 لدينا: $u_1+u_2+.....+u_n=u_1\times\frac{1-q^{n}}{1-q}$

5 نتيجة:

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 لدينا

$$1+x^2+.....+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

مثال: $1+2^2+2^3+...+2^9=\frac{1-2^{9+1}}{1-2}=2^{10}-1$

3.3/ اتجاه التغير لمتتالية هندسية:

(U_n) متتالية هندسية حدّها الأول u_0 وأساسها q بحيث $u_0>0$; $q>0$ لدينا:

- إذا كان $q>1$ فالمتتالية متزايدة تماماً.
- إذا كان $0<q<1$ فالمتتالية متناقصة تماماً.
- إذا كان $q=1$ فالمتتالية ثابتة.

(U_n) متتالية هندسية حدّها الأول u_0 وأساسها q بحيث $u_0<0$; $q>0$ لدينا:

- إذا كان $q>1$ فالمتتالية متناقصة تماماً.
- إذا كان $0<q<1$ فالمتتالية متزايدة تماماً.
- إذا كان $q=1$ فالمتتالية ثابتة.

ملاحظة: إذا كان $q<0$ سالب فان المتتالية الهندسية ليست رتيبة (ليست متزايدة ولا ليست متناقصة)

أمثلة:

أدرس تغيرات كل من: $u_n=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$ و $v_n=\frac{3}{2^n}$ المعرفتان على $\mathbb{N}$:

لدينا u_n من الشكل $u_0\cdot q^n$ وهي متتالية هندسية حيث: $u_0=2$ و $q=\frac{3}{2}$

بما أن u_0 موجب و $q=\frac{3}{2}>1$ فان المتتالية $u_n=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$ متزايدة تماماً

4. تعيين متتالية هندسية أو حسابية علما حدان منها.

تمرين 1:

(u_n) متتالية حسابية حيث $u_5 = 4$ و $u_{10} = -11$. عين هذه المتتالية؟

الحل:

نفرض r أساس هذه المتتالية و u_0 حدها الأول

لدينا: $u_{10} = u_5 + (10-5)r \Rightarrow -11 = 4 + 5r$ ومنه $r = \frac{-11-4}{5} = -3 \Rightarrow r = -3$

كذلك: $u_5 = u_0 + nr \Rightarrow 4 = u_0 + 5(-3)$ ومنه $u_0 = 4 + 15 = 15 \Rightarrow u_0 = 19$

نستنتج أن (u_n) هي المتتالية التي حدها الأول $u_0 = 19$ وأساسها $r = -3$

ومنه حدها العام من الشكل $\boxed{u_n = 19 - 3n}$

طريقة:

لتعيين متتالية حسابية (u_n) علما حدان منها u_m و u_p نتبع ما يلي:

- نستعمل الدستور $u_m = u_p + (m-p)r$ لتعيين قيمة الأساس r
- نطبق الدستور $u_m = u_0 + mr$ لإيجاد قيمة الحد الأول (u_n)

تمرين 2:

(v_n) متتالية هندسية حيث $v_3 = 24$ و $v_5 = 96$. عين المتتالية v_n

الحل:

نفرض q أساس هذه المتتالية و v_0 حدها الأول

لدينا: $v_5 = v_3 \times q^{5-3} \Rightarrow 96 = 24 \times q^2$ ومنه $q^2 = \frac{96}{24} = 4$

بمعنى أن: $q = 2$ أو $q = -2$.

إذا كان $q = 2$ لدينا: $v_3 = q^3 v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{24}{2^3} = 3$ ومنه $v_0 = 3$

إذا كان $q = -2$ لدينا: $v_3 = q^3 v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{24}{(-2)^3} = -3$ ومنه $v_0 = -3$

نستنتج وجود متتاليتين هندسيتين هما: المتتالية ذات الحد الأول -3 والأساس -2 ومتتالية حدها الأول 3 وأساسها 2.

طريقة:

لتعيين متتالية هندسية (u_n) علما حدان منها u_m و u_p نتبع ما يلي:

- نستعمل الدستور $u_m = u_p \times q^{m-p}$ لتعيين قيمة الأساس q
- نطبق الدستور $u_m = u_0 \times q^m$ لإيجاد قيمة الحد الأول (u_n)

بالتوفيق في شهادة البكالوريا إن شاء الله

(اتجاه تغير دالة)

بالتوفيق في شهادة البكالوريا إن شاء الله

1| تذكير حول المعادلات والمتراجحات:

1. دراسة إشارة العبارة $ax+b$ مع $a\in\mathbb{R}^*$; $b\in\mathbb{R}$:

لدراسة إشارة العبارة $ax+b$ يجب إيجاد قيم العدد x حيث:

$ax+b=0/1$ (تنعدم) $ax+b>0/2$ (موجبة) $ax+b<0/3$ (سالبة)

1/ تنعدم إذا وفقط كان: $ax+b=0$ ومنه

$ax+b=0\Rightarrow ax=-b$

$\Rightarrow x=-\frac{b}{a}$ نقول أن العبارة $ax+b$ تنعدم من أجل $x=-\frac{b}{a}$

وإشارة العبارة $ax+b$ تتعلق بإشارة العدد a كما هو موضح في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
إشارة $ax+b$	عكس إشارة a	0	نفس إشارة a

مثال1: دراسة إشارة العبارة: $3x+4$.

$3x+4=0$ يكافئ $3x=-4$ ومنه $x=-\frac{4}{3}$

إشارة العبارة $3x+4$ تلخص في الجدول الموالي:

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
إشارة $ax+b$	$-$	0	$+$

2. دراسة إشارة العبارة ax^2+bx+c حيث $a\neq 0$:

1.2| المعادلات من الدرجة الثانية:

- تسمى معادلة من الدرجة الثانية ذات مجهول حقيقي x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^2+bx+c=0$ حيث a، b، c أعداد حقيقية ثابتة معلومة و $a\neq 0$.

2.2| حل المعادلات من الدرجة الثانية:

مبرهنة: لتكن في $\mathbb{R}$ المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث $a\neq 0$، و Δ مميزها حيث $\Delta=b^2-4ac$

الجدول أدناه يوضح مراحل حل معادلة $ax^2+bx+c=0$.

	إذا كان	حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0$ هي	تحليل ax^2+bx+c
مبرهنة	$\Delta>0$	$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
	$\Delta=0$	$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$	$a(x-x_1)^2$
	$\Delta<0$	لا توجد حلول	لا يمكن تحليل العبارة

ملاحظة: في حالة $\Delta=0$ نقول أن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلاً مضاعفاً $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$.

3.2 | المتراجحات من الدرجة الثانية:

نسمي متراجحة من الدرجة الثانية ذات مجهول حقيقي x ، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الأشكال التالية $ax^2+bx+c\le 0$ ، $ax^2+bx+c<0$ ، $ax^2+bx+c\ge 0$ ، $ax^2+bx+c>0$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية ثابتة معلومة و $a\neq 0$.

4.2 | حل متراجحات من الدرجة الثانية:

مبرهنة: يؤول حل متراجحة من الدرجة الثانية إلى دراسة إشارة ثلاثي الحدود

إشارة العبارة ax^2+bx+c حيث $a\neq 0$:

ax^2+bx+c ثلاثي حدود مع $a\neq 0$ و $\Delta=b^2-4ac$ مميزه.

- $\Delta<0$ المعادلة $ax^2+bx+c=0$ لا تقبل حلولا من أجل كل عدد حقيقي x ، إشارة ax^2+bx+c هي من نفس إشارة a.
- $\Delta=0$ المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلاً مضاعفاً x_1.

وإشارة ax^2+bx+c موضحة في الجدول المقابل:

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
ax^2+bx+c	نفس إشارة a	0	نفس إشارة a

- $\Delta>0$ المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين متمايزين x_1 و x_2.

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ وإشارة ax^2+bx+c موضحة في الجدول التالي: (نعتبر $x_1<x_2$)

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a

أمثلة:

1. دراسة إشارة x^2+2x-2:

حل المعادلة $x^2+2x-2=0$

لدينا $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-2 \end{cases}$ حيث $\Delta=b^2-4ac$ ومنه $\boxed{\Delta=12}$

بما أن $\Delta>0$ فالمعادلة $x^2+2x-2=0$ تقبل حلين هما: $\boxed{x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-\sqrt{4\times 3}}{2}=\frac{-2-2\sqrt{3}}{2}=-1-\sqrt{3}}$ و

$\boxed{x_2=-1+\sqrt{3}}$.

ومنه مجموعة حلول المعادلة $x^2+2x-2=0$ هي: $S=\{-1-\sqrt{3};-1+\sqrt{3}\}$

إشارة x^2+2x-2 موضحة في الجدول الموالي:

لدينا $a=1>0$ ومنه:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2+2x-2		+	0	-	0	+	

تطبيق 1: أدرس إشارة العبارات الموالية:

$2x^2+3x+4$ | $-16x^2+8x-1$ | x^2-x-6

2| تذكير حول الدوال المشتقة:

1.الدالة المشتقة لدالة (تعريف)

f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$.

- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد x_0 من D_f ، نقول إنها قابلة للاشتقاق على المجال D_f .
- إن الدالة التي ترفق بكل عدد x من D_f العدد المشتق $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f على D_f ويرمز لها بالرمز: f' ، ونكتب: $f': x \to f'(x)$

2.الدوال المشتقة لبعض الدوال المألوفة:

تعتبر الدالة f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها

ولتكن a ، b و k أعداد حقيقية، نلخص الدالة المشتقة للدالة f في الجدول أدناه:

الدالة f	مجموعة التعريف	قابلية الاشتقاق	الدالة المشتقة $f'(x)$	مثال تطبيقي
$f(x)=k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$f(x)=2$ أي: $f'(x)=0$
$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$f(x)=x$ أي: $f'(x)=1$
$f(x)=ax+b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=a$	$f(x)=4x-8$ أي: $f'(x)=4$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$f(x)=x^2$ أي: $f'(x)=2x$
$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=3x^2$	$f(x)=x^3$ أي: $f'(x)=3x^2$
$f(x)=x^n$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$f(x)=x^7$ أي: $f'(x)=7x^6$
$f(x)=x^3+x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=3x^2+2x$	$f(x)=x^3+4x$ أي: $f'(x)=3x^2+4$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f(x)=\frac{3}{x}$ أي: $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$f(x)=\frac{1}{x^8}$ أي: $f'(x)=-\frac{8}{x^9}$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$f'(x)=-\frac{2}{x^3}$	$f(x)=\frac{1}{x^3}$ أي: $f'(x)=-\frac{2}{x^4}$

3.عمليات على الدوال المشتقة:

الدالة	مجالات قابلية الاشتقاق	الدالة المشتقة

$f+g$	يأخذ الشرط حسب كل دالة	$f'+g'$
$f\times g$		$f'g+g'f$
$\lambda f\ (\lambda\in\mathbb{R})$		$\lambda f'$
$\frac{1}{f}$		$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$		$\frac{f'g-g'f}{g^2}$

أمثلة:

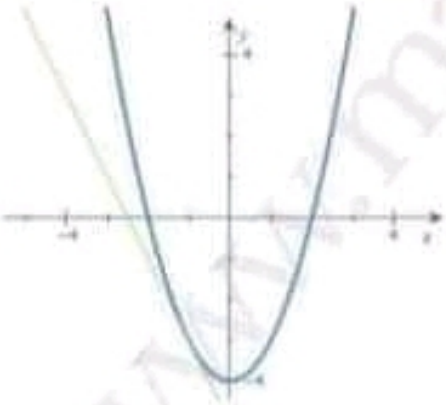
- ✓ الدالة $f(x)=3x-5$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x)=3$.
- ✓ الدالة $f(x)=-2x^2+8x-9$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x)=-4x+8$.
- ✓ الدالة $f(x)=\frac{1}{3x-2}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x)=-\frac{3}{(3x-2)^2}$.
- ✓ الدالة $f(x)=\frac{x-1}{3x-2}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x)=\frac{1(3x-2)-3(x-1)}{(3x-2)^2}$.

4. مماس لمنحن عند نقطة منه :

f دالة معرفة على مجال D من $\mathbb{R}$، و (C) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 من D و $f'(x_0)$ العدد المشتق للدالة f عند x_0 فإن المستقيم الذي يشمل النقطة $A(x_0,f(x_0))$ ومعامل توجيهه $f'(x_0)$ يسمى مماس المنحنى (C) عند النقطة A. معادلته هي: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

مثال:



f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2-4$

كتابة معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-1$.

معادلة المماس (T) من الشكل: $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

لدينا: $f'(x)=2x$

ومنه: $f(-1)=-3$ و $f'(-1)=-2$.

ومنه معادلة المماس (T) هي: $y=-2(x+1)-3$ أي $\boxed{y=-2x-5}$.

(T) مماس للمنحنى (C) عند النقطة A.

تطبيق 2: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^3-2x$

أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $a=1$

5. اتجاه تغير دالة:

لتكن دالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$ و f' دالتها المشتقة.

- إذا كانت f' موجبة تماما على المجال D فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال D.

- إذا كانت f' سالبة تماما على المجال D فان الدالة f متناقصة تماما على المجال D.
- إذا كانت f' معدومة على المجال D فان الدالة f ثابتة على المجال D.

ملاحظات:

- هذه المبرهنة تبقى صحيحة إذا انعدمت f' من أجل قيم معزولة من D.
- إذا كانت دالة f إما متزايدة تماما أو متناقصة تماماً على مجال D نقول أن الدالة f رتيبة تماما على المجال D.

مثال:

لتكن الدالة $f: x \to x^2-1$ متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$ لأن $f'(x)=2x$ و: $f'(x)>0$ إذا كان $x>0$ وكذلك: $f'(x)<0$ إذا كان $x<0$.

مثال:

الدالة $f(x)=x^2-8x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x)=2x-8$

$f'(x)=0$ يكافئ $2x-8=0$ أي $x=4$ وعليه إشارة f' موضحة في الجدول الموالي:

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

وعليه الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty,4]$ ومتزايدة تماماً على المجال $[4,+\infty[$.

تطبيق 3: أدرس اتجاه تغير الدالة f في كل حالة مما يلي:

1) $f(x)=-3x^2+3x-2$

2) $f(x)=\dfrac{4x+3}{x+2}$

(الدوال كثيرات الحدود)

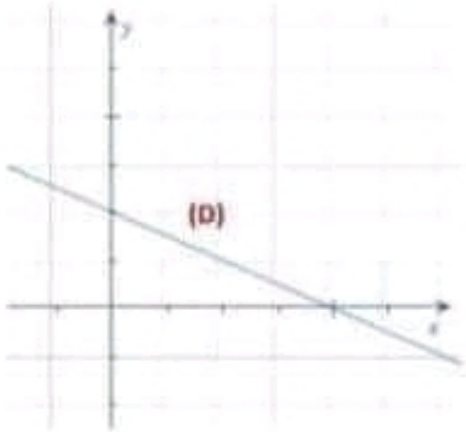
1| الدوال كثيرات حدود من الدرجة الأولى:

1. تعريف: نسمي دالة كثير حدود من الدرجة الأولى كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=ax+b$
حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان مع $a\neq 0$.

2. اتجاه التغير:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ من الشكل $f(x)=ax+b$ لدينا:

- ✓ إذا كان $a<0$ (سالب) فإن f متناقصة تماما.
- ✓ إذا كان $a>0$ (موجب) فإن f متزايدة تماما.
- ✓ إذا كان $a=0$ (معدوم) فإن f ثابتة.



3. التمثيل البياني لدالة كثير حدود من الدرجة الأولى

تمثيل دالة كثير حدود من درجة 1: $f(x)=ax+b$ هو عبارة عن مستقيم (D)
ذات معامل التوجيه a ويشمل النقطة $B(0;b)$ وهي التراتيب إلى المبدأ.
و $y=ax+b$ هي معادلة للمستقيم (D).

4. نهايات دالة كثير حدود من الدرجة الأولى:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b)=\lim\limits_{x\to+\infty}(ax)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax+b)=\lim\limits_{x\to-\infty}(ax)$

و هكذا يكون لدينا:

- ✓ إذا كان $a>0$ (a موجب) فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax+b)=-\infty$
- ✓ إذا كان $a<0$ (a سالب) فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax+b)=+\infty$

أمثلة:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-5)=\lim\limits_{x\to+\infty}(4x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x-5)=\lim\limits_{x\to-\infty}(4x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+4)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+4)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$

2| الدوال كثيرات حدود من الدرجة الثانية:

1. تعريف: نسمي دالة كثير حدود من الدرجة الثانية كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=ax^2+bx+c$
حيث a و b ، c ثلاثة أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq 0$.

2. اتجاه التغير:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ من الشكل $f(x)=ax^2+bx+c$

لدراسة تغيرات الدالة f يكفي دراسة إشارة الدالة المشتقة لها f'
حيث $f'(x)=2ax+b$

3. نهايات دالة كثير حدود من الدرجة الثانية:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^2+bx+c)=\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^2)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax^2+bx+c)=\lim\limits_{x\to-\infty}(ax^2)$

و هكذا يكون لدينا:

- ✓ إذا كان $a>0$ (a موجب) فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^2+bx+c)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax^2+bx+c)=+\infty$

✔ إذا كان $a<0$ (a سالب) فإن: $\lim_{x\to-\infty}(ax^2+bx+c)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(ax^2+bx+c)=-\infty$

أمثلة:

- $\lim_{x\to-\infty}(2x^2-x+4)=\lim_{x\to-\infty}(2x^2)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(2x^2-x+4)=\lim_{x\to+\infty}(2x^2)=+\infty$
- $\lim_{x\to-\infty}(-7x^2+8x)=\lim_{x\to-\infty}(-7x^2)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(-7x^2+8x)=\lim_{x\to+\infty}(-7x^2)=-\infty$
- $\lim_{x\to-\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$

3| الدوال كثيرات حدود من الدرجة الثالثة:

1. تعريف: نسمي دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

حيث a و b ، c و d أعداد حقيقية ثابتة مع $a\neq0$.

2. اتجاه التغير:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ من الشكل $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

لدراسة تغيرات الدالة f يكفي دراسة إشارة الدالة المشتقة لها f'

حيث $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

3. نهايات دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة:

$\lim_{x\to-\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=\lim_{x\to-\infty}(ax^3)$ و $\lim_{x\to+\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=\lim_{x\to+\infty}(ax^3)$

و هكذا يكون لدينا:

✔ إذا كان $a>0$ (a موجب) فإن: $\lim_{x\to-\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=+\infty$

✔ إذا كان $a<0$ (a سالب) فإن: $\lim_{x\to-\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=-\infty$

أمثلة:

- $\lim_{x\to-\infty}(x^3-4x^2+4)=\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(x^3-4x^2+4)=\lim_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$
- $\lim_{x\to-\infty}(-12x^3-x^2+5x-1)=\lim_{x\to-\infty}(-12x^3)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(-12x^3-x^2+5x-1)=\lim_{x\to+\infty}(-12x^3)=-\infty$

جدول ملخص لنهايات الدوال المرجعية

التسمية	مجموعة التعريف	الدالة	النهايات
الخطية	$\mathbb{R}$	$x\to x$	$\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$
مربع	$\mathbb{R}$	$x\to x^2$	$\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$
مكعب	$\mathbb{R}$	$x\to x^3$	$\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

أمثلة:

$f(x)=3x^3-x+1$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}3x^3=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}3x^3=+\infty$

إذن: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$g(x)=-5x^3+2x^2+x-4$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}(-5x^3)=+\infty$ و

$\lim_{x\to+\infty}(-5x^3)=-\infty$

إذن: $\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

تطبيق 1:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-3x-2$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1. عين نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f(x)=(x-2)(x+1)^2$

- استنتج إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

4. أرسم المنحنى (C_f)

الحل:

1. حساب النهايات

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة f

الدالة المشتقة: f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=3x^2-3$

دراسة إشارة $f'(x)$:

$f'(x)=0$ يكافئ $3x^2-3=0$ أي $x^2=\frac{3}{3}=1$ ومنه $x=1$ أو $x=-1$

وبما أن $f'(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية إشارته موضحة في الجدول الموالي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

وعليه: الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty,-1]$ و $[1,+\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $[-1,1]$.

جدول التغيرات للدالة f:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-1)=0$	↘	-4	↗	$+\infty$

3. إثبات أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f(x)=(x-2)(x+1)^2$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$(x-2)(x+1)^2=(x-2)(x^2+2x+1)$$
$$=x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2=x^3-3x-2=f(x)$$

وعليه $f(x)=(x-2)(x+1)^2$

استنتاج إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل معناه $y=0$ و $y=f(x)$ إذا $y=0$ معناه $f(x)=0$

$f(x)=0$ يكافئ $(x-2)(x+1)^2=0$

أي $x-2=0$ أو $x+1=0$ ومنه $x=2$ أو $x=-1$

وعليه نستنتج أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين هما $A(2,0)$ و $B(-1,0)$.

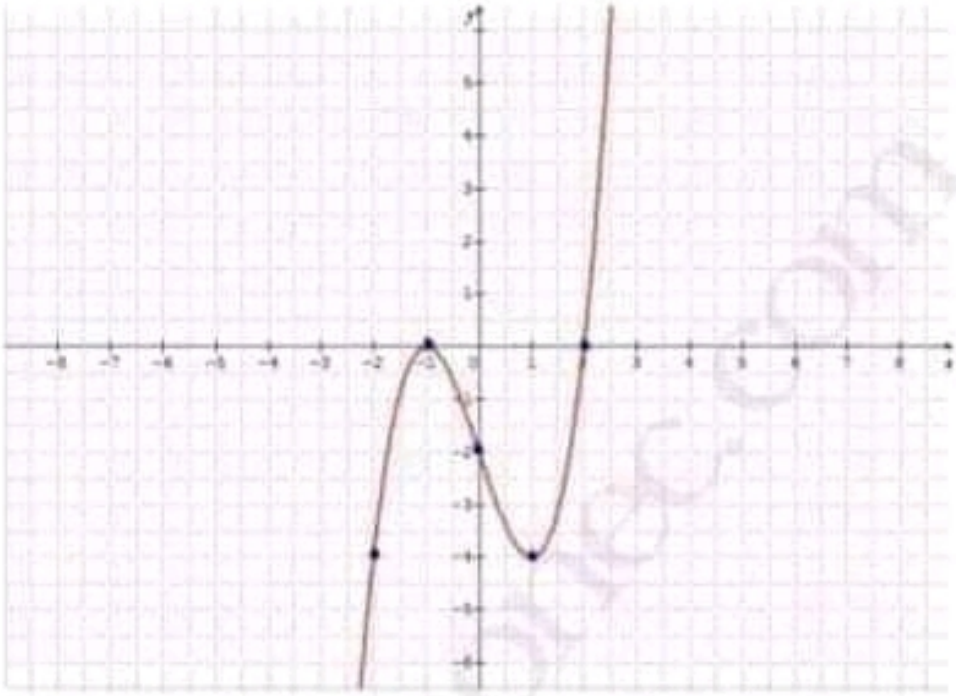
4. رسم المنحنى (C_f)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	0	-2	-4	0

لرسم المنحنى (C_f) نشئ بعض النقط المساعدة باستعمال الجدول الموالي:

$$f(-2)=(-2)^3-3(-2)-2=-8+6-2=-4$$

التمثيل البياني:



تطبيق 2:

f و g دالتين معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+x+1$ و $g(x)=x^3$ وليكن (C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيين.

1) أحسب نهايتي كل من الدالتين f و g عند $+\infty$ و $-\infty$
2) أثبت أن الدالتين f و g متزايدتان تماماً على $\mathbb{R}$.
3) أنجز جدول تغيرات كل من f و g
4) عين الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g).
5) أرسم (C_f) و (C_g) في نفس المعلم.

الحل:

① حساب نهايتي كل من الدالتين f و g :

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$

② إثبات أن الدالتين f و g متزايدتان تماما على $\mathbb{R}$:

- الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x)=3x^2+1$ و $g'(x)=3x^2$.
- دراسة إشارة $f'(x)$ و $g'(x)$:

الحل:

1. دراسة تغيرات الدالة $g(x)=\frac{x+2}{x}$.

مجموعة التعريف: $D_g=\mathbb{R}-\{0\}=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

حساب الدالة المشتقة: $f'(x)=\frac{x-x-2}{x^2}=\frac{-2}{x^2}$

جدول التغيرات:

بما أن $\frac{-2}{x^2}<0$ فإن الدالة متناقصة تماماً على D_g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	‖	$-$
$g(x)$	$1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

حساب النهايات:

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)=1$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)=1$

$\lim_{x\to0^-}\frac{x+2}{x}=-\infty$ و $\lim_{x\to0^+}\frac{x+2}{x}=+\infty$

2. كتابة معادلة (T) مماس المنحنى (C_g) عند النقطة -1.

$$y=g'(-1)(x+1)+g(1-)$$
$$=-2x-2-1$$

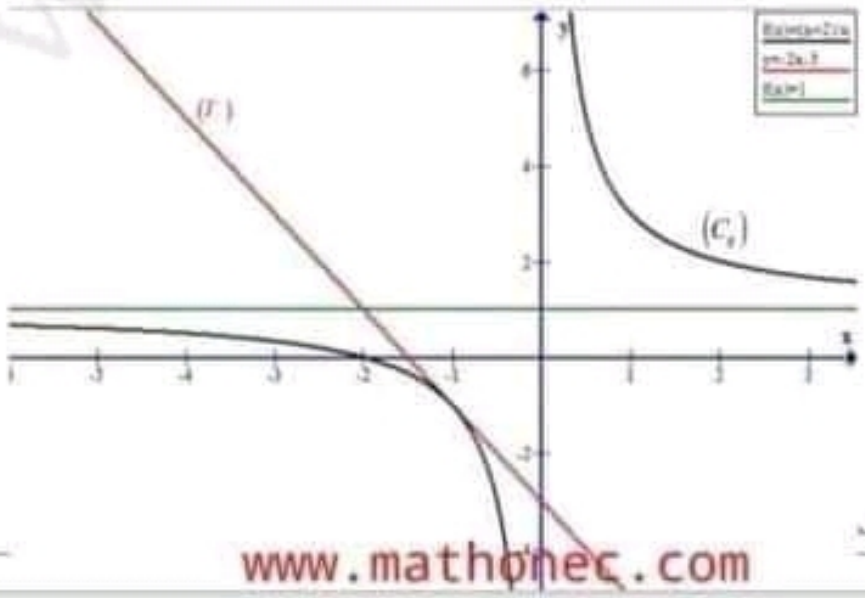
ومنه معادلة المماس (T) هي $\boxed{y=-2x-3}$

3. تعيين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى:

✓ بما أن $\lim_{x\to0^+} g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to0^-} g(x)=-\infty$ فان المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x=0}$ مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب

✓ بما أن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)=1$ فان المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=1}$ مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل

4. تمثيل (Δ) و (C_f).



مخطط دراسة دالة (ملخص عام)

لدراسة دالة نتبع الخطوات التالية:

1. تعيين مجموعة التعريف.
2. دراسة شفعية أو دوريتها قصد تقليص مجموعة دراستها.
3. حساب النهايات عند حدود مجموعة الدراسة.
4. دراسة اتجاه تغير الدالة:
   - حساب المشتقة على المجالات التي تقبل عليها الدالة الاشتقاق
   - دراسة اشارة الدالة المشتقة واستنتاج اتجاه التغير
5. تشكيل جدول تغيرات الدالة: (تلخيص دراسة التغير في جدول)
6. تحديد المستقيمات المقاربة.
7. التمثيل البياني للدالة:
   - رسم المستقيمات المقاربة
   - تمثيل النقط المساعدة: النقط الحدية، نقط تقاطع المنحنى مع محوري الإحداثيات.
   - رسم المماسات عند القيم الحدية وأخرى مطلوبة في النص.

تذكير بشفعية دالة:

تعريف: لتكن f دالة معرفة على D_f من $\square$، لدينا:

- نقول أن f دالة زوجية إذا كان D_f متناظر بالنسبة إلى 0 وكان لكل x من D: $f(-x)=f(x)$.
- نقول أن f دالة فردية إذا كان D_f متناظر بالنسبة إلى 0 وكان لكل x من D: $f(-x)=-f(x)$.

أمثلة: دراسة شفعية الدالتان: $f(x)=2x^2+1$ و $g(x)=-\frac{2}{x}$.

1. تعيين مجموعة التعريف: لدينا $D_f=\square$ و $D_g=\square-\{0\}$ وكلاهما متناظر بالنسبة إلى 0
2. دراسة شفعية كلا الدالتين:

f زوجية لأن: $f(-x)=2(-x)^2+1=2x^2+1=f(x)$.

g فردية لأن: $g(-x)=-\frac{2}{(-x)}=-\left(\frac{2}{x}\right)=-g(x)$.

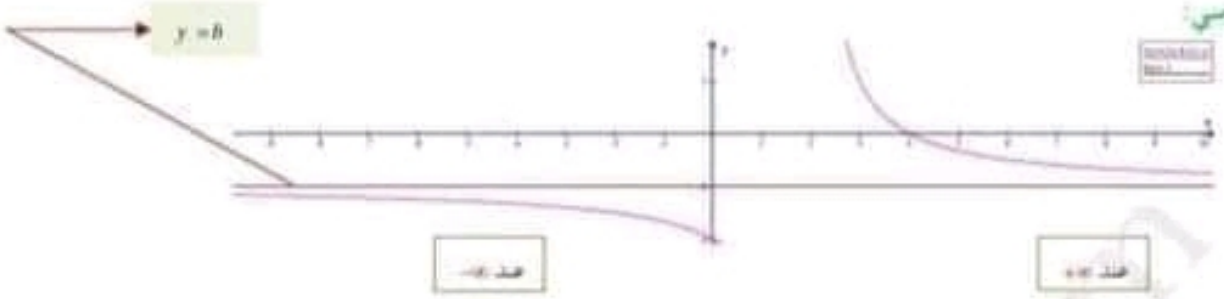
ملاحظات:

- لدراسة شفعية دالة يجب أن تكون مجموعة تعريفها متناظرة بالنسبة لـ 0 .

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ أو $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

ملاحظة: إذا كان $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ (أو $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$) فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = b$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) يوازي محور الفواصل

التفسير الهندسي:



مثال: h دالة معرفة على $]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$ كما يلي: $h(x) = \frac{2x+7}{4-x}$ و (C_h) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

لدينا: $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x+7}{4-x}\right) = -2$ و $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+7}{4-x}\right) = -2$

إذن المستقيم (C_h) ذو المعادلة $y = -2$ مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل للمنحنى (C_h).

ملاحظة هامة:

يسمى التمثيل البياني للدالة التناظرية $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ قطعاً زائداً معادلتا مستقيميه المقاربين هما: $y = \frac{a}{c}$ و $x = -\frac{d}{c}$

تطبيق 3:

g دالة معرفة بـ: $g(x) = \frac{x+2}{x}$ و (C_g) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1. أدرس تغيرات الدالة g. أحسب نهاية g عن حدود مجموعة تعريفها.
2. عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة -1.
3. عين معادلات المستقيمات المقاربة الممكنة.
4. أرسم (C_g) و (T).

(الاحتمالات)

1. مفردات ومفاهيم

تعريف1: إمكانية تجربة عشوائية هي أي نتيجة ممكنة لهذه التجربة.

تعريف2: مجموعة الإمكانيات هي كل النتائج الممكنة لهذه التجربة يرمز لها ب: Ω.

مثال: رمي زهر النرد هي تجربة عشوائية نتائجها الممكنة هي ظهور الأوجه الستة أي: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

تعريف الحادثة: هي جزء من مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية أي مجموعة النتائج التي تتميز بنفس الخاصية.

مثال: A هي الحادثة "الحصول على وجه رقمه فردي" عند رمي زهر النرد ومنه: $A = \{1;3;5\}$

الحوادث الخاصة:

1. الحادثة الأكيدة: هي Ω أي مجموعة النتائج الممكنة.
2. الحادثة المستحيلة: هي المجموعة الخالية $\varnothing$ بدون إمكانية.
3. الحادثة البسيطة: تتكون من نتيجة واحدة (مجموعة أحادية). مثلا: رمي زهر النرد: $\{6\};\{5\}$

تقاطع حادثتين: تقاطع حادثتين A وB هو مجموع النتائج المشتركة للحادثتين، رمزه: $A \cap B$

مثال: في تجربة رمي زهر النرد لدينا:

A هي الحادثة "الحصول على وجه رقم زوجي" معناه: $A = \{2;4;6\}$

B هي الحادثة "الحصول على وجه رقمه مضاعف للعدد 3" معناه: $B = \{3;6\}$

تقول $A \cap B$ هي الحادثة" الحصول على وجه رقمه عدد زوجي ومضاعف للعدد3: $A \cap B = \{6\}$.

الحادثتان المنفصلتان (غير متلائمتان):

كل حادثتين لا تشتركان في أي نتيجة تسمى حادثتين منفصلتين ونكتب: $A \cap B = \varnothing$

مثال:

A هي الحادثة "الحصول على وجه رقمه فردي" معناه: $A = \{1;3;5\}$

B هي الحادثة "الحصول على وجه رقمه مضاعف للعدد 4" معناه: $B = \{4\}$

وبالتالي: $A \cap B = \varnothing$ معناه A وB منفصلتان.

اتحاد حادثتين: إتحاد حادثتين A وB هو الحادثة المتكونة من نتائج A أو نتائج B رمزه: $A \cup B$

أمثلة: عند رمي زهر النرد لدينا:

A هي الحادثة "الحصول على وجه رقمه زوجي" معناه: $A = \{2;4;6\}$

B هي الحادثة "الحصول على وجه أكبر أو يساوي العدد 3" معناه: $B = \{3;4;5;6\}$

وبالتالي: $A \cup B = \{2;3;4;5;6\}$.

الحادثة المعاكسة:

الحادثة المعاكسة لحادثة A مجموع النتائج التي لا تنتمي إلى A ونرمز لها بالرمز: $\overline{A}$ تقرأ: "A لا"

مثال:

في تجربة رمي زهر النرد: A هي الحادثة "الحصول على وجه رقمه فردي" معناه: $A = \{1;3;5\}$ فتكون الحادثة المعاكسة لها هي:

$\overline{A} = \{2;4;6\}$

2. الاحتمالات

1. قانون الاحتمال:

لتكن Ω مجموعة ذات n إمكانية لتجربة عشوائية أي: $\Omega = \{x_1, x_2 ..... x_n\}$، نعرف قانون احتمال **P** على **E** بإرفاق كل إمكانية x_i بعدد موجب P_i حيث مجموع الأعداد P_i يساوي **1**.

معناه: ونقرأ: العدد P_i هو احتمال وقوع الإمكانية x_i.

2. قانون تساوي الاحتمال:

- في تجربة عشوائية ذات Ω مجموع إمكانيات وإذا كان لكل الإمكانيات نفس الاحتمال، نقول أن قانون الاحتمال **مساوي التوزيع أو مساوي الاحتمال**.
- إذا كان n عدد عناصر Ω، فإن احتمال وقوع كل عنصر x_i من Ω يعطى بالعلاقة: $P_i = \frac{1}{n}$.

ملاحظات: هناك بعض التعابير التي تدل على وضعية تساوي الاحتمال منها:

- **تختار بصفة عشوائية.**
- **نرمي قطعة نقدية متوازنة.**
- **نرمي زهر نرد غير مزيف.**
- **الكرات أو القريصات الموجودة داخل العلبة لا نفرق بينها باللمس.**

مثال: رمي قطعة نقدية متوازنة يعطي احتمال ظهور الصورة أو الرسم يساوي $\frac{1}{2}$.

رمي زهر النرد غير مزيف به **6** أوجه، يعطي احتمال الحصول على احد الأوجه هو $\frac{1}{6}$

نظرية لابلاس (Laplace):

من أجل $\Omega = \{x_1, x_2 ..... x_n\}$ مجموع إمكانيات لتجربة عشوائية معرفة بقانون الاحتمال: $p : x_i \to p_i$.

في حالة قانون تساوي الاحتمال على مجموعة Ω و A حادثة من Ω، فان احتمال A يساوي حاصل قسمة عدد عناصر A على عدد عناصر Ω.

معنى: إذا كان a عدد عناصر حادثة A و n عدد عناصر Ω فان احتمال A يعطى ب: $p(A) = \frac{a}{n}$.

بحيث: $p(A)$: احتمال حادثة A ذات a إمكانيات.

n: عدد عناصر Ω و a عدد عناصر A.

أمثلة: **1)** رمي زهر النرد يعطي: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,\}$

A حادثة" الحصول على وجه رقمه عدد زوجي" أي: $A = \{2,4,6\}$

نقول احتمال الحادثة A هو: $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ / حيث عدد عناصر Ω هو **6** وعدد عناصر A هو **3**.

2) قسم مكون من **20** ولد و**12** بنت:

باختيار تلميذ بصفة عشوائية، يكون احتمال الحصول على ولد هو: $\frac{20}{32}$ أي $\frac{5}{8}$

2. احتمال حادثة"

- في تجربة عشوائية ذات Ω مجموع إمكانيات مرفقة بقانون احتمال و**A** حادثة فان:

احتمال الحادثة **A** هو مجموع احتمالات إمكانيات هذه الحادثة.

مثال:

لتكن الحادثة A ذات الإمكانيات: $A=\{x_1,x_2,x_3\}$ حيث:

احتمال الحادثة A هو: $P(A)=p(x_1)+p(x_2)+p(x_3)$

3.خواص:

- احتمال الحادثة المستحيلة منعدم: $P(\varnothing)=0$.
- احتمال الحادثة الأكيدة يساوي 1: $P(\Omega)=1$.
- إذا كان A و B حادثتين من نفس المجموعة Ω فإن:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

- إذا كان A و B حادثتين منفصلتين فإن: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

A حادثة من المجموعة Ω و $\overline{A}$ الحادثة العكسية لها، يمكن حساب: $P(\overline{A})=1-P(A)$

إذا كان:	نقول أن:	ملاحظات
$A=\varnothing$	A هي الحادثة المستحيلة	$\varnothing$ الخبر الخالي
$A=\Omega$	A الحادثة الأكيدة	--
$a\in A$	الإمكانية a تحقق الحادثة A	--
$C=A\cup B$	C هي الحادثة A و B	C هي الحادثة التي تحوي عناصر A وعناصر B
$D=A\cap B$	D هي الحادثة A أو B	D هي الحادثة التي تحوي العناصر المشتركة بين A و B
$A\cap B=\varnothing$	A و B حادثتان غير متلائمتين	$A\cap B$ مجموعة خالية.
$E=\overline{A}$	E الحادثة العكسية للحادثة A	E الحادثة التي تحوي كل عناصر Ω ما عدا عناصر A

3. حساب احتمال باعتماد شجرة الإمكانيات

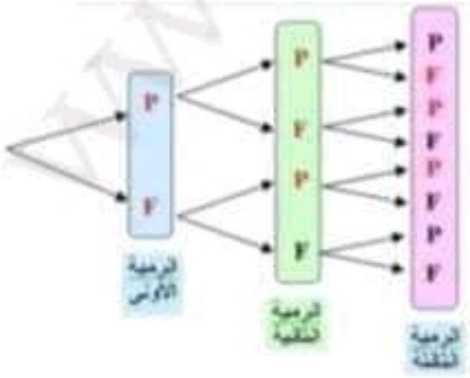
تطبيق 1:

نرمي قطعة نقود متوازنة ثلاثة مرات متتالية.

نعتبر الحادثة A : " الحصول على ظهرين و وجه " (في أي ترتيب كان) نرمز للظهر بالرمز P و للوجه بالرمز F

1- أنشئ مخططا يوضح كل الحالات .

2- استنتج احتمال الحادثة A .



الحل:

1| هناك 8 إمكانيات فقط منها 3 إمكانيات ملائمة للحادثة A

و هي PPF – PFP – FPP

يسمى المخطط "شجرة الإمكانيات"

2| بما أن التجربة متساوية الاحتمال فإن احتمال الحادثة A

هو $P(A)=\frac{\text{عدد عناصر A}}{\text{عدد عناصر }\Omega}$ أي $P(A)=\frac{3}{8}$

قابليّة الإشتقاق عند عدد و كل التفسيرات الهندسيّة الجميلة

المحور : الدوال العددية
مادة الرياضيات

إعداد الأستاذ: ط . كمال الدين
الشعب : ❸ رياضي / تقني رياضي / علوم

قابليّة الإشتقاق عند عدد حقيقي $x = a$

❑ **طريقة :** لدراسة قابلية إشتقاق الدالة f عند العدد الحقيقي a نتّبع الخطوات التالية :

① نتأكد أن الدالة f مستمرة عند a .(في منهاج الرياضيات الجزائري كل الدوال المُعطاة مستمرة على كل مجال من مجموعة التعريف).

② نحسب : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ أو $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h + a) - f(a)}{h}$.

فنتحصّل على أحد النتائج الجميلة التالية :

إذا كان:	فإن:	المنحني الممثل للدالة f يقبل :
$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$	f قابلة للإشتقاق عند a و عددها المُشتق عند a هو $f'(a) = l$	مماسا عند النُقطة ذات الفاصلة $x = a$ معادلته : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \mp\infty$	f غير قابلة للإشتقاق عند a.	مماسا موازيا لحامل محور التراتيب معادلته: $x = a$.
$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l_1$	f قابلة للإشتقاق عند a من اليمين .	نصف مماس من اليمين عند النقطة ذات الفاصلة $x = a$.
$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l_2$	f قابلة للإشتقاق عند a من اليسار .	نصف مماس من اليسار عند النقطة ذات الفاصلة $x = a$.
$l_1 \neq l_2$	f غير قابلة للإشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة $x = a$.	نقطة زاويّة عند النقطة ذات الفاصلة $x = a$

التمرين الرابع

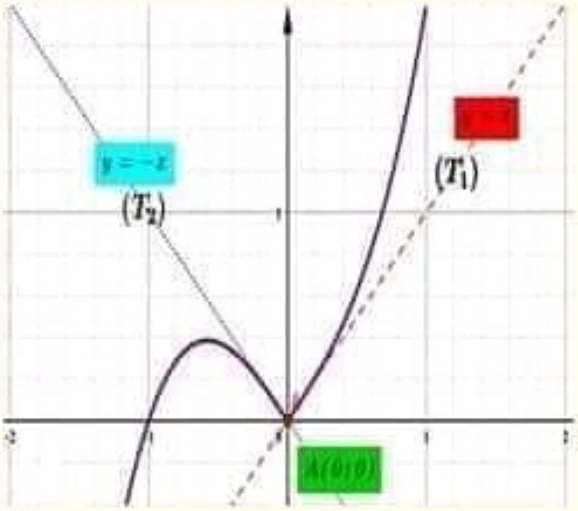
أدرس قابلية إشتقاق الدالة f المُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3 + |x|$ عند $a = 0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا .

الإجابة:

أوّلا نزع القيمة المُطلقة :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + (+x); & x \geq 0 \\ x^3 + (-x); & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 + x; & x \in [0; +\infty[\\ x^3 - x & ; x \in]-\infty; 0] \end{cases}$$

(على يمين 0)(بقيم كبرى)
(على يسار 0)(بقيم صغرى)



❑ حساب النهاية من اليمين ـ نستعمل العبارة الأولى ـ

$$\begin{aligned} \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x^3 + x - (0^3 + 0)}{x} \\ &= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x^3 + x}{x} \\ &= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\cancel{x}(x^2 + 1)}{\cancel{x}} \\ &= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} (x^2 + 1) = 1 = f'_d(0) \end{aligned}$$

التفسير الهندسي : f قابلة للإشتقاق من اليمين عند النقطة ذات الفاصلة $x = 0$ ، و (C_f) يقبل نصف مماس (T_1) عند $x = 0$ مُعادلته : $y = f'_d(0)(x - 0) + f(0) = 1(x - 0) + (0^3 + 0) = x$

❑ حساب النهاية من اليسار ـ نستعمل العبارة الثانيّة ـ

$$\begin{aligned} \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x^3 - x - (0^3 - 0)}{x} \\ &= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x^3 - x}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\cancel{x}(x^2 - 1)}{\cancel{x}} \\ &= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} (x^2 - 1) = -1 = f'_g(0) \end{aligned}$$

التفسير الهندسي : f قابلة للإشتقاق من اليسار عند النقطة ذات الفاصلة $x = 0$ ، و (C_f) يقبل نصف مماس (T_2) عند $x = 0$ مُعادلته : $y = f'_g(0)(x - 0) + f(0) = -1(x - 0) + (0^3 - 0) = -x$

نتيجة : نلاحظ أن : $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ ، ومنه الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند النقطة $A(0 : 0)$ ، و نسمي A بـ : **نقطة زاويّة** . ($f'_d(0)$: العدد المُشتق من اليمين ، $f'_g(0)$: العدد المشتق من اليسار).