دليل الاحتمالات بصيغة مبسطة وشامل

إعداد الأستاذ محمد حاقة

قف عند ناصية الحلم وقاتل

1) **التجربة العشوائية:** هي كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها، رغم معرفتنا لمجموعة النتائج الممكنة

2) **مجموعة الإمكانيات:** هي مجموعة النتائج الممكنة، ونرمز لها عادة بـــ Ω

3) **الحادثة:** هي كل جزء من مجموعة الإمكانيات Ω

4) **نتيجة هامة:** في حالة تساوي الاحتمال،لدينا: $P(A)=\dfrac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$

5) **خواص:** Ω هي مجموعة الإمكانيات مزودة بقانون احتمال P

- من أجل كل حادثة A : $\boxed{0 \le P(A) \le 1}$ ، $P(\varnothing)=0$ و $P(\Omega)=1$
- إذا كانت A و B حادثتان كيفيتين فان: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
- إذا كانت A و B حادثتان غير متلائمتين (منفصلتان) فان: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
- إذا كانت $\overline{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A فان: $\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$
- إذا كانت $A\subseteq B$ (معناه A جزء من B) فان $P(A)\le P(B)$
- احتمال الحادثة B علما أنّ الحادثة A محققة هو العدد الحقيقي $P_A(B)$ حيث $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$
- $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$ و $P(A\cap B)=P(B)\times P_B(A)$
- إذا كانت A و B حادثتان مستقلتان فان $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ (معناه $P_A(B)=P(B)$)

مثال توضيحي: لتكن $\Omega=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ مجموعة نتائج تجربة عشوائية ونعتبر الحادثتين

$$A=\{2;4;6;8\} \text{ و } B=\{7;8;9\}$$

- أحسب الاحتمالات التالية: $P(A)$ و $P(B)$ و $P(\overline{A})$ و $P(A\cup B)$ و $P(A\cap B)$ و $P_A(B)$

6) **العد: العاملي،القائمة ، الترتيبة ،التبديلة ، التوفيقة**

1) **العاملي:** $n!=n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1$

مثال:أحسب $5!$ ، $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

تذكر: $\boxed{1!=1}$ و $\boxed{0!=1}$

2) **القائمة** : عدد القوائم ذات p عنصرا من مجموعة ذات n هي n^p

3)**الترتيبة:** ويرمز لعدد الترتيبات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالرمز A_n^p

حيث $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

مثال: أحسب A_5^2، $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$

تذكر: $\boxed{A_1^0 = 1}$ و $\boxed{A_1^1 = 1}$

4)**التوفيقة:** نرمز لعدد التوفيقات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n بالرمز C_n^p ونكتب:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

مثال: أحسب C_5^2، $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!.3!} = \frac{120}{12} = 10$

تذكر: $\boxed{C_n^n = C_n^0 = 1}$ $\boxed{C_n^1 = n}$

5)**التبديلة:** عدد التبديلات هو $A_n^n = n!$

ملحوظة: عدد التبديلات مع التكرار (معامل الترتيب) يساوي: $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}$

7) **العد وأنواع السحب :** n و p عددان طبيعيان غير معدومين،نسحب p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا.

السحب	القانون المستعمل
على التوالي بإرجاع	n^p
على التوالي دون إرجاع	A_n^p
في آن واحد	C_n^p
تشكيل لجنة مرفقة بمهام	A_n^p
تشكيل لجنة غير مرفقة بمهام (لهم نفس المهام)	C_n^p

8)كيفية الحساب بالآلة الحاسبة

هناك رمز $X!$ مقصود به العاملي تصل إليها عن طريقSHIFT

هناك خانة مكتوب عليها nCr تمثل التوفيقة، مثلا لحساب C_5^2 : نضغط على 5 وبعد nCr وبعد 2

هناك خانة مكتوب عليها nPr نصل إليها عن طريقSHIFT هي نفس خانة nCrتمثل الترتيبة، مثلا لحساب A_5^2 : نضغط على 5 وبعدSHIFT وبعد nPr وبعد 2

ملحوظة:هناك نوع تجد الرمز nCr و nPr في خانة × و ÷

معلومة: في الحساب (' و ' تعني الضرب) (' أو ' تعني الجمع)

9) الأمل الرياضي، التباين و الانحراف المعياري لمتغير عشوائي X

الأمل الرياضي $E(X)$	$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
التباين $V(X)$	$V(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-E(X)\right)^2 p_i$ أو $V(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-\left(E(X)\right)^2$
الانحراف المعياري $\sigma(X)$	$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

10) خواص متعلقة بالمتغير العشوائي X

a و b عددان حقيقيان، لدينا

$$E(aX+b)=a\times E(X)+b$$

$$V(aX+b)=a^2\times V(X)$$

$$\sigma(aX+b)=|a|\times\sigma(X)$$

11) المثلث العددي

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$C_{n-1}^{p}+C_{n-1}^{p-1}=C_n^{p}$

12) دستور ثنائي الحد : a و b عددان طبيعيان ، n عدد طبيعي $(n\geq 1)$ لدينا

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1} a\, b^{n-1} + b^n}$$

13) دستور الاحتمالات الكلية :

لتكن $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ حوادث احتمالاتها غير معدومة تشكل تجزئة للمجموعة الشاملة E

لدينا من أجل كل حادثة B

$$\boxed{p(B)=p(A_1\cap B)+p(A_2\cap B)+\ldots..+p(A_n\cap B)}$$

مع $p(A_k\cap B)=p(A_k)\times p_{A_k}(B)$ من أجل كل k حيث $1\leq k\leq n$

البصمة الجميلة تبقى وإن غاب صاحبها ,,, محبكم في الله الأستاذ محمد حاقة . King.

التمرين الأول : (يلخص العديد من الأفكار وبسيط)

يحتوي صندوق على 12 كريه منها 5 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 5 وأربعة كرات حمراء مرقمة من 1 إلى 4 وثلاث كرات سوداء مرقمة من 1 إلى 3 الكرات لا نميز بينها باللمس نسحب عشوائيا وفي ان واحد 3 كرات من الصندوق

1) ما هو عدد الحالات الممكنة

2) أحسب احتمال الحصول على:

A : " ثلاث كرات من نفس اللون "

C :" كريه بيضاء فقط "

D:" ثلاث كرات غير بيضاء "

E : " كريه بيضاء على الأقل "

F :" اثنان من الكرات المسحوبة على الأكثر سوداء "

G : " كريتين حمراء وكرية سوداء "

K : " ثلاث أرقام فردية "

S : " كرة واحدة فقط تحمل رقم 4 "

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات البيضاء

أ/ عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X و عرف قانون احتماله

ب/ احسب $E(X)$ ، $V(X)$ و $\sigma(X)$ واستنتج $E(-2X+3)$ و $V(-2X+3)$

التمرين الثاني

صندوق يحتوي على 10 كريات منها 7 حمراء و 3 سوداء الكريات لا نفرق بينها باللمس، نسحب عشوائيا كريتين على التوالي دون ارجاع

1) ما هو عدد الحالات الممكنة
2) ما احتمال الحصول على كريتين حمراء
3) ما احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون
4) ما احتمال الحصول على كريه سوداء وكرية حمراء بهذا الترتيب
5) ما هو احتمال الحصول على كريه سوداء وكرية حمراء
6) ما هو احتمال الحصول على كريه حمراء على الأكثر

ملحوظة: أعد نفس الأسئلة السابقة لكن السحب هذه المرة على التوالي بإرجاع

التمرين الثالث:

كيس يحتوي على 8 كرات منها 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء وكرة واحدة بيضاء، الكرات لا نميز بينها باللمس نسحب عشوائيا وفي ان واحد 3 كرات من الكيس،

1) أحسب احتمال الحصول على:

- ثلاث كرات من نفس اللون - كرة على الأقل حمراء - كرتين على الأكثر حمراء

2) نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق عدد الألوان المحصل عليها

أ/ ما هي قيم X ثم احسب الاحتمالات التالية: $P(X=1)$ ، $P(X=3)$ واستنتج $P(X=2)$

ب/احسب الأمل الرياضي $E(X)$ ، التباين $V(X)$ ثم الانحراف المعياري $\sigma(X)$